# ANNALES

# CONCOURS SUR LICENCE AFRIQUE

Ecole Centrale Casablanca – Inventons le monde de demain

www.centrale-casablanca.ma

# Table des matières

*SUJETS DE MATHEMATIQUES* ____ *3*

**2022-1** ____ **3**

**2022-2** ____ **7**

**2019-1** ____ **11**

**2019-2** ____ **14**

**2018-1** ____ **17**

**2018-2** ____ **19**

**2017** ____ **22**

**2016** ____ **26**

*SUJETS DE PHYSIQUE* ____ *29*

**2022** ____ **29**

**2019** ____ **37**

**2018-1** ____ **43**

**2018-2** ____ **49**

**2017** ____ **55**

**2016** ____ **63**

*SUJETS D'ANGLAIS* ____ *71*

**2022-1** ____ **71**

**2022-2** ____ **80**

**2019** ____ **87**

**2018-1** ____ **89**

**2018-2** ____ **92**

**2017** ____ **95**

**2016** ____ **98**

*École Centrale Casablanca*
*Concours d'admission 2022*

# Épreuve de mathématiques

*Les candidats sont informés que la qualité de la rédaction et de la présentation, la clarté et la précision des raisonnements constitueront des éléments importants pour l'appréciation des copies. Il convient en particulier de rappeler avec précision les références des questions abordées.*

*Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.*

Le sujet de cette épreuve est composé de deux problèmes indépendants entre eux.

## Problème 1

On souhaite déterminer pour $p$ entier supérieur ou égale à 2, les fonctions $f_p : ]0,+\infty[\to \mathbb{R}$ vérifiant les relations :

$$\lim_{x\to+\infty} f_p(x) = 0 \text{ et } \forall x \in ]0,+\infty[, f_p(x+1) + f_p(x) = \frac{1}{x^p} \qquad (E_p)$$

### Partie 1 : Existence et unicité de la solution de $(E_p)$

Dans cette partie, on démontre que $(E_p)$ admet une unique solution et on détermine une expression de celle-ci sous la forme d'une série de fonctions.

**Dans tout le problème, $p$ est un entier supérieur ou égale à 2.**

**Existence de la solution**

Pour tout entier naturel $k$, on définit la fonction $\varphi_k : ]0,+\infty[\to \mathbb{R}$ par

$$\forall x \in ]0,+\infty[, \varphi_k(x) = \frac{(-1)^k}{(x+k)^p}$$

1. Montrer que la série de fonctions $\sum_{k\geq 0} \varphi_k$ converge simplement sur $]0,+\infty[$.

   Dans tout le reste du problème, on note $\varphi : ]0,+\infty[\to \mathbb{R}$ la somme de la série $\sum_{k\geq 0} \varphi_k$.

2. Montrer que $\forall x \in ]0,+\infty[, \varphi(x+1) + \varphi(x) = \frac{1}{x^p}$.

3. a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in ]0,+\infty[, \left|\sum_{k=n+1}^{+\infty} \varphi_k(x)\right| \leq \frac{1}{(x+n+1)^p}$.

   b) En déduire que la série $\sum_{k\geq 0} \varphi_k$ converge uniformément sur $]0,+\infty[$.

4. Conclure que la fonction $\varphi$ est une solution de $(E_p)$.

**Unicité de la solution**

5. Montrer que si $f : ]0,+\infty[\to \mathbb{R}$ est une solution de $(E_p)$, alors,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in ]0,+\infty[, f(x) = (-1)^{n+1} f(x+n+1) + \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(x+k)^p}.$$

6. En déduire que la fonction $\varphi$ est l'unique solution de $(E_p)$.

## Partie 2 : Étude de la solution de $(E_p)$

Dans cette partie, on étudie quelques propriétés de l'unique solution $\varphi : ]0,+\infty[\to \mathbb{R}$ de $(E_p)$.

7. Montrer que la fonction $\varphi$ est continue sur $]0,+\infty[$.

8. En utilisant le fait que $\varphi$ est une solution de $(E_p)$, en déduire un équivalent simple de $\varphi$ au voisinage de $0^+$.

9. Justifier que la fonction $\varphi$ est dérivable sur $]0,+\infty[$ et que l'on a

$$\forall x \in ]0,+\infty[, \varphi'(x) = p\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{(x+k)^{p+1}}.$$

10. En déduire que la fonction $\varphi$ est décroissante sur $]0,+\infty[$.

11. En utilisant le résultat de la question précédente et la relation $(E_p)$, montrer que

$$\forall x \in ]1,+\infty[, \frac{1}{x^p} \leq 2\varphi(x) \leq \frac{1}{(x-1)^p}.$$

12. En déduire un équivalent de $\varphi$ en $+\infty$.

## Partie 3 : Expression intégrale de la solution de $(E_p)$

Dans cette partie, on détermine une expression de $\varphi$ sous la forme d'une intégrale.
Soit $x \in ]0,+\infty[$.

13. Montrer que la fonction $t \longmapsto t^{x-1}\ln^{p-1}(t)$ est intégrable sur $]0,1]$.

14. Montrer que, pour tout entier naturel $k$, la fonction $t \to t^{x+k-1}\ln^{p-1}(t)$ est intégrable sur $]0,1]$.
On pose pour tout entier naturel $k$,

$$I_{k,p} = \int_0^1 t^{x+k-1}\ln^{p-1}(t)dt$$

15. Vérifier que $I_{k,p+1} = \dfrac{-p}{x+k} I_{k,p}$ et en déduire que l'on a

$$\int_0^1 t^{x+k-1}\ln^{p-1}(t)dt = \frac{(-1)^{p-1}(p-1)!}{(x+k)^p}$$

16. En déduire que la fonction $t \mapsto \dfrac{t^{x-1}\ln^{p-1}(t)}{1+t}$ est intégrable sur $]0,1]$ et que l'on a

$$\varphi(x) = \frac{(-1)^{p-1}}{(p-1)!}\int_0^1 \frac{t^{x-1}\ln^{p-1}(t)}{1+t}dt$$

## Problème 2

On désigne par $n$ un entier supérieur ou égal à 2, et par $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ l'algèbre des matrices carrées d'ordre $n$ à coefficients dans $\mathbb{K}$, avec $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. La matrice identité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est notée $I_n$.
On note, pour un $\mathbb{K}-$espace vectoriel $E$ de dimension finie $n$, $\mathcal{L}(E)$ l'algèbre des endomorphismes de $E$. Pour toute matrice $A$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on appelle commutant de $A$ et on note $\mathcal{C}(A)$ l'ensemble des matrices $M$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ qui commutent avec $A$, c'est-à-dire :

$$\mathcal{C}(A) = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \mid \ AM = MA\}$$

Pour tous entiers $i$ et $j$ de $\{1, \ldots, n\}$, on note $E_{ij}$ la matrice élémentaire de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ dont le coefficient de la $i^{\text{ème}}$ ligne et la $j^{\text{ème}}$ colonne vaut 1 et dont tous les autres coefficients sont nuls. On rappelle que la famille $(E_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$ représente la base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

### Partie 1 : Propriétés générales du commutant

Soit $A$ est une matrice quelconque de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

1. Montrer que $\mathcal{C}(A)$ est une sous-algèbre de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
2. Montrer que si $M$ est une matrice de $\mathcal{C}(A)$ inversible, alors $M^{-1}$ est dans $\mathcal{C}(A)$.
3. Soit $P$ une matrice inversible de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $B = P^{-1}AP$.
   On considère l'application
   $$\varphi : \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \\ M & \longmapsto & P^{-1}MP \end{array}$$
   Montrer que la restriction de $\varphi$ à $\mathcal{C}(A)$ est un isomorphisme d'espaces vectoriels de $\mathcal{C}(A)$ vers $\mathcal{C}(B)$.

### Partie 2 : Centre de quelques sous-groupes de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

On appelle centre d'un sous-groupe $G$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, l'ensemble

$$Z(G) = \{M \in G \mid \forall N \in G, \ \ MN = NM\}$$

4. Soit $M = (m_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$ une matrice de $Z(\mathcal{M}_n(\mathbb{K}))$.
   a) Exprimer pour $i, j \in \{1, \ldots, n\}$, $ME_{ij}$ et $E_{ij}M$ dans la base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
   b) En déduire que $Z(\mathcal{M}_n(\mathbb{K})) = \{\lambda I_n \mid \ \lambda \in \mathbb{K}\}$.
5. a) Vérifier que pour $i, j \in \{1, \ldots, n\}$, $I_n + E_{ij}$ est inversible.
   b) En déduire le centre de $GL_n(\mathbb{K})$ où $GL_n(\mathbb{K})$ désigne le groupe des matrices inversibles de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
6. On note $O_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ orthogonales.
   On rappelle que $O_n(\mathbb{R}) = \{N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid {}^tNN = I_n\}$. Soit $M \in Z(O_n(\mathbb{R}))$.
   a) Montrer que pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$, $M$ commute avec les matrices $F_{ii} = I_n - 2E_{ii}$, en déduire que $M$ commute avec les matrices $E_{ii}$.
   b) Soient $i, j \in \{1, \ldots, n\}$ tels que $i \neq j$.
   On pose $\Omega = I_n - E_{ii} - E_{jj} + E_{ij} + E_{ji}$ et $\Omega' = I_n - E_{ii} - E_{jj} + E_{ij} - E_{ji}$.
   Montrer que $\Omega$ et $\Omega'$ sont deux matrices orthogonales.

c) En déduire que, pour tous $i, j \in \{1, \ldots, n\}$, $M$ commute avec $E_{ij}$.

d) Conclure $Z(O_n(\mathbb{R}))$.

### Partie 3 : Commutant d'un endomorphisme diagonalisable

Soit $E$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n$. Pour un endomorphisme $f$ de $E$, on note $\mathcal{C}(f)$ le commutant de $f$ donné par $\mathcal{C}(f) = \{g \in \mathcal{L}(E) \mid fog = gof\}$. On suppose que $f$ est diagonalisable, avec $E_{\lambda_1}, \ldots, E_{\lambda_r}$, les sous-espaces propres associées aux valeurs propres distinctes $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ de $f$, de dimensions respectives $n_1, \ldots, n_r$, $(r \in \mathbb{N}^*)$.

7. Soit $g \in \mathcal{C}(f)$. Montrer que pour tout $i \in \{1, \ldots, r\}$, $E_{\lambda_i}$ est stable par $g$. Ainsi, la restriction de $g$ à $E_{\lambda_i}$ est un endomorphisme de $E_{\lambda_i}$ qu'on note $g|_{E_{\lambda_i}}$.

8. Soit $g \in \mathcal{L}(E)$. On suppose que pour tout $i \in \{1, \ldots, r\}$, $E_{\lambda_i}$ est stable par $g$.

   a) Montrer que $\forall x \in E_{\lambda_i}$, $gof(x) = fog(x)$.

   b) En déduire que $g \in \mathcal{C}(f)$.

9. Conclure que :
$$\mathcal{C}(f) = \{g \in \mathcal{L}(E) \mid \forall i \in \{1, \ldots, r\}, g(E_{\lambda_i}) \subset E_{\lambda_i}\}$$

10. Justifier l'existence d'une base de $E$, $\mathcal{B} = \bigcup_{i=1}^{r} \mathcal{B}_i$ où $\forall i \in \{1, \ldots, r\}$, $\mathcal{B}_i$ est une base de $E_{\lambda_i}$.

11. Montrer que si $g \in \mathcal{C}(f)$, alors la matrice de $g$ dans la base $\mathcal{B}$ est de la forme $diag(M_1, ..., M_r)$ avec $M_i \in \mathcal{M}_{n_i}(\mathbb{K})$.

12. On considère l'application
$$\begin{array}{rccc} \Phi : & \mathcal{C}(f) & \longrightarrow & \prod_{i=1}^{r} \mathcal{L}(E_{\lambda_i}) \\ & g & \longmapsto & (g|_{E_{\lambda_1}}, ..., g|_{E_{\lambda_r}}) \end{array}$$

   a) Montrer que $\Phi$ est un isomorphisme.

   b) En déduire que
$$\dim(\mathcal{C}(f)) = \sum_{i=1}^{r} n_i^2.$$

13. On suppose que les valeurs propres de $f$ sont simples. Montrer que $(Id_E, f, f^2, ..., f^{n-1})$ est une base de $\mathcal{C}(f)$.

14. Déterminer la dimension de $\mathcal{C}(f)$ dans les cas suivants :

   a) $f$ est un projecteur de $E$ de rang $r$.

   b) $f$ est une symétrie de $E$ dont $\dim(Ker(f - id_E)) = p$.

**FIN DE L'ÉPREUVE**

*École Centrale Casablanca*
*Concours d'admission 2022*

# Épreuve de mathématiques

*Les candidats sont informés que la qualité de la rédaction et de la présentation, la clarté et la précision des raisonnements constitueront des éléments importants pour l'appréciation des copies. Il convient en particulier de rappeler avec précision les références des questions abordées.*

*Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.*

Le sujet de cette épreuve est composé de deux problèmes indépendants entre eux.

## Problème 1

Pour tout entier naturel non nul $n$, on pose $H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ et $u_n = H_n - \ln(n)$.

### Partie 1
### Développement asymptotique de la suite $(H_n)_{n\geq 1}$

1. a) Montrer que $(u_n - u_{n+1}) \sim \frac{1}{2n^2}$.

   b) En déduire que $\sum_{n\geq 1}(u_n - u_{n+1})$ est une série convergente.

   c) Justifier que la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ converge. On note $\gamma$ sa limite.

   d) Montrer que pour tout entier n tel que $n \geq 2$, $\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k} \leq \ln n \leq \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}$.

   e) En déduire que $0 \leq \gamma \leq 1$.

2. On pose pour tout entier naturel non nul $n$, $v_n = u_n - \gamma$.

   a) Vérifier que $\gamma = 1 + \sum_{n=2}^{+\infty} \left(\frac{1}{n} - \ln\left(\frac{n}{n-1}\right)\right)$.

   b) En déduire que $v_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \left(\ln\left(\frac{k}{k-1}\right) - \frac{1}{k}\right)$.

   c) Conclure que $H_n = \ln(n) + \gamma + \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$.

### Partie 2
### Une expression de $\gamma$ sous forme d'une intégrale

On considère la fonction $\varphi$ définie sur $]0,1[$ par $\varphi(t) = \frac{1}{t} + \frac{1}{\ln(1-t)}$ et la fonction $\psi$ définie sur $]0,+\infty[$ par $\psi(t) = \frac{1}{1-e^{-t}} - \frac{1}{t}$. On pose $I = \int_0^1 \varphi(t)dt$.

1. a) Vérifier que $\lim_{t\to 1-} \varphi(t) = 1$ et $\lim_{t\to 0+} \varphi(t) = \frac{1}{2}$.

   b) En déduire que $I$ est une intégrale convergente.

2. a) Montrer que $\psi$ est une fonction bornée sur $]0, +\infty[$.

   b) Montrer que $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \psi(t)e^{-t}dt$.

3. a) Vérifier que, pour tout entier naturel non nul $n$ et pour tout réel strictement positif $x$,

$$\frac{1}{1-e^{-x}} = \sum_{k=0}^{n-1} e^{-kx} + \frac{e^{-nx}}{1-e^{-x}}$$

   b) Montrer que, pour tout entier naturel non nul $n$,

$$I = H_n - \int_0^{+\infty} \frac{e^{-x} - e^{-(n+1)x}}{x} dx + \int_0^{+\infty} e^{-(n+1)x}\psi(x)dx$$

4. Montrer que, pour tout entier naturel non nul $n$ et pour tout réel strictement positif $\varepsilon$,

$$\int_\varepsilon^{+\infty} \frac{e^{-x} - e^{-(n+1)x}}{x} dx = \int_\varepsilon^{(n+1)\varepsilon} \frac{e^{-x}}{x} dx$$

5. Calculer l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-x} - e^{-(n+1)x}}{x} dx$.

6. En déduire que $I = \gamma$.

## Partie 3
## Une application de la fonction $\gamma$

Pour tout entier naturel non nul $n$, on note $m_n = \min\{k \in \mathbb{N}^* \mid H_k \geq n\}$
et on pose $\varepsilon_n = \dfrac{1}{2n} + o\left(\dfrac{1}{n}\right)$.

1. Justifier l'existence de $m_n$.

2. Établir que $\exp(n - \gamma - \varepsilon_{m_n}) \leq m_n < 1 + \exp(n - \gamma - \varepsilon_{m_n - 1})$

3. En déduire un équivalent de $m_n$.

4. Conclure que $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{m_{n+1}}{m_n} = e$.

# Problème 2

Dans ce problème on se propose de caractériser de deux façons l'ensemble des matrices de trace nulle. Soit $E$ un $\mathbb{K}$−espace vectoriel de dimension finie $n$, $n$ un entier supérieur ou égal à 2. On note $\mathcal{L}(E)$ l'espace des endomorphismes de $E$.

## Partie 1
## Préliminaires

1. Montrer qu'un endomorphisme $f \in \mathcal{L}(E)$ est une homothétie si, et seulement si, $\forall x \in E$ , la famille $(x, f(x))$ est liée.

2. Soit $D$ une matrice diagonale d'éléments diagonaux distincts deux à deux. Déterminer l'espace vectoriel des matrices qui commutent avec $D$.

## Partie 2
## Une première caractérisation

On se propose de montrer par récurrence que pour tout entier naturel non nul $n$, si $f$ est un endomorphisme de trace nulle d'un espace vectoriel $E$ de dimension $n$ sur $\mathbb{K}$, alors il existe une base de $E$ telle que la matrice de $f$ dans cette base ait tous ses coefficients diagonaux nuls.

1. Montrer que la propriété est vraie pour $n = 1$.

2. On suppose alors la propriété vraie pour un entier naturel non nul $n$. On se propose alors de la montrer pour $n + 1$. On se donne un espace vectoriel $E$ de dimension $n + 1$ sur $\mathbb{K}$ et un endomorphisme $f$ de $E$ de trace nulle.

   a) Examiner le cas où $f$ est une homothétie.
   **On suppose maintenant $f$ n'est pas une homothétie.**

   b) Justifier qu'il existe un élément $e_1$ de $E$ tel que $(e_1, f(e_1))$ soit une famille libre de $E$. On pose alors $e_2 = f(e_1)$.

   c) Montrer qu'il existe un supplémentaire $H$ de la droite $D = Vect(e_1)$ qui contient $e_2$. On note $p$ la projection sur $H$ parallèlement à $D$. On pose $\forall y \in H, g(y) = p(f(y))$.
   Montrer que $g$ définit un endomorphisme de $H$ de trace nulle.

   d) Conclure en utilisant l'hypothèse de récurrence.

## Partie 3
## Une deuxième caractérisation

On se propose de montrer que $f \in \mathcal{L}(E)$ est de trace nulle si, et seulement s'il existe $g, h \in \mathcal{L}(E)$ tels que $f = [g, h] = gh - hg$.

***Une première méthode.***

On considère une matrice diagonale $D = \text{diag}(1, 2, ..., n)$ de $M_n(\mathbb{K})$. $\Psi_D$ l'endomorphisme de $M_n(\mathbb{K})$ définit par, $\forall M \in M_n(\mathbb{K}), \Psi_D(M) = DM - MD$.

1. Déterminer $Ker(\Psi_D)$.

2. **a)** Pour $M = (m_{ij})_{1 \leq i,j \leq n} \in M_n(\mathbb{K})$, on pose $\psi_D(M) = (u_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$. Déterminer $u_{ij}$ en fonction de $i, j$ et $m_{ij}$.

   **b)** En déduire que $Im(\Psi_D)$ est l'ensemble des matrices de $M_n(\mathbb{K})$ dont tous les éléments diagonaux sont nuls.

3. Conclure.

***Une deuxième méthode.***

1. Montrer le résultat pour les espaces vectoriels de dimension 1.
   Soit $n$ un entier supérieur ou égal à 2. On suppose que la condition est nécessaire pour tous les espaces vectoriels de dimension $n - 1$, et on se propose de montrer le résultat dans $E$ qui est de dimension $n$.

   Soit $f$ un endomorphisme non nul de $E$ de trace nulle.

2. Montrer par l'absurde qu'il existe un élément $e_1$ de $E$ tel que $(e_1, f(e_1))$ soit libre.

3. Montrer que l'on peut compléter $(e_1)$ en une base $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ de $E$ telle que la matrice $A$ de $f$ dans cette base soit de la forme $\begin{pmatrix} 0 & {}^tX \\ Y & A_1 \end{pmatrix}$ avec $X, Y \in M_{n-1,1}(\mathbb{K})$ et $A_1 \in M_{n-1}(\mathbb{K})$.

4. Montrer l'existence de deux éléments $U_1$ et $V_1$ de $M_{n-1}(\mathbb{K})$ tels que: $A_1 = U_1V_1 - V_1U_1$.

5. Justifier l'existence d'un élément $\alpha$ de $\mathbb{K}$ tel que $U_1 - \alpha I_{n-1}$ soit inversible.

6. On pose $U = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & U_1 \end{pmatrix}$ et $V = \begin{pmatrix} 0 & {}^tR \\ S & V_1 \end{pmatrix}$ avec $R, S \in M_{n-1,1}(K)$.

   Montrer que $A = UV - VU$ si, et seulement si, ${}^tX = -{}^tR(U_1 - \alpha I_{n-1})$ et $Y = (U - \alpha I_{n-1})S$.

7. Conclure.

**FIN DE L'ÉPREUVE**

## 2019-1

**École Centrale Casablanca**
Concours d'admission 2019

# Épreuve de Mathématiques

Dans toute la suite on note $E = \mathbb{R}[X]$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des polynômes en l'indéterminée $X$ à coefficients dans $\mathbb{R}$. Étant donné un polynôme $P \in E$, on note $\deg(P)$ le degré de $P$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on note $E_n = \mathbb{R}_n[X]$ le sous-espace vectoriel de $E$ formé par les polynômes de degré $\leq n$. On rappelle que la famille $1, X, \ldots, X^n$ est une base de $E_n$.

## 1 Questions préliminaires

Cette partie contient des questions préliminaires qui pourront être utilisées dans la deuxième et la troisième partie. La première question est indépendante des deuxième et troisième questions.

1. Soit $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une famille de polynômes telle que $\deg(P_n) = n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
   a. Vérifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$ la famille $P_0, P_1, \ldots, P_n$ est une base de $E_n$.
   b. En déduire que $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une base de $E$.
2. Montrer que pour tout $x \in ]-1, +\infty[$ on a
$$\ln(1+x) \leq x.$$
3. Montrer que la suite $\left(\ln(n) - \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{i}\right)_{n>1}$ est convergente.

## 2 Première partie

Soit $D$ l'endomorphisme de $E$ défini pour tout $P \in E$ par
$$D(P) = P(X+1) - P(X).$$
Pour tout $n \geq 1$ on pose
$$U_n = \frac{X(X-1)\cdots(X-n+1)}{n!} = \frac{1}{n!}\prod_{i=0}^{n-1}(X-i).$$
On pose $U_0 = 1$ et on note $D_n$ la restriction de $D$ à $\mathbb{R}_n[X]$.

4. **Étude de l'endomorphisme** $D$.
   a. Vérifier que pour tout polynôme non constant $P$ de $E$ on a $\deg(D(P)) = \deg(P) - 1$.
   b. En déduire que $D_n$ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ et que $D_n^{n+1} = 0$.
   c. En déduire également que le noyau de $D$ est $\ker D = E_0$.

5. **Étude de la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$.**

a. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a

$$D(U_{n+1}) = U_n.$$

b. Montrer que pour tout $P \in \mathbb{R}[X]$ de degré $n \geq 0$ on a

$$P = \sum_{i=0}^{n} D^i(P)(0)U_i,$$

où $D^i(P)(0)$ est la valeur du polynôme $D^i(P)$ au point 0.

c. Pour tout $x \in \mathbb{R}$ on note $T_x$ l'endomorphisme de $E$ défini pour tout $P \in E$ par

$$T_x(P) = P(X + x).$$

Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a $T_x \circ D = D \circ T_x$.

d. Montrer que pour tout $n \geq 0$ et tout $x \in \mathbb{R}$ on a

$$U_n(X + x) = \sum_{i=0}^{n} U_{n-i}(x)U_i(X).$$

e. Conclure que pour tout $n \geq 0$ et tous $x, y \in \mathbb{R}$ on a

$$U_n(x + y) = \sum_{i=0}^{n} U_{n-i}(x)U_i(y).$$

# 3 Deuxième partie

On se propose dans cette partie de montrer la convergence normale de la série de fonctions $\sum U_n(x)$ sur tout intervalle borné de $\mathbb{R}_+^*$, et de calculer sa limite. Notons qu'il suffit de montrer la convergence normale sur tout intervalle de la forme $[a, b]$, où $b \in \mathbb{N}^*$ et $0 < a < b$.

Le produit de Cauchy de deux séries numériques $\sum a_n$ et $\sum b_n$ est défini comme étant la série de terme général

$$c_n = \sum_{i=0}^{n} a_{n-i}b_i.$$

Le théorème de Cauchy-Mertens assure que si les deux séries $\sum a_n$ et $\sum b_n$ convergent absolument alors leur produit de Cauchy converge absolument et on a

$$\sum_{n=0}^{+\infty} c_n = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n\right).$$

6. **Convergence de la série $\sum U_n(x)$.**

a. Vérifier que pour $n \geq 1$ et tout $x \in \mathbb{R}$ on a

$$U_n(x) = \frac{x}{n}\prod_{i=1}^{n-1}\left(\frac{x}{i} - 1\right).$$

b. Soit $b \in \mathbb{N}^*$. Montrer qu'il existe $M > 0$ tel que pour tout $n > b+1$ et tout $x \in [0, b]$ on a

$$|U_n(x)| \leq \frac{bM}{n} \prod_{i=b+1}^{n-1} \left(1 - \frac{x}{i}\right).$$

c. Soient $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{N}$ tels que $0 < a < b$. Montrer que la suite

$$\left(n^a \prod_{i=b+1}^{n-1} \left(1 - \frac{x}{i}\right)\right)_{n>b+1}$$

est majorée indépendamment de $x \in [a, b]$.

d. En déduire qu'il existe $C > 0$ tel que pour tout $n > b+1$ on ait

$$\sup_{x \in [a,b]} |U_n(x)| \leq \frac{C}{n^{1+a}}.$$

Conclure que la série $\sum U_n(x)$ converge normalement sur $[a, b]$.

7. **Calcul de la somme $\sum_0^{+\infty} U_n(x)$.**

Soit $f(x)$ la somme de la série de fonctions $\sum U_n(x)$ sur $\mathbb{R}_+$, et notons que $f(0) = 1$.

a. Montrer que pour tout $x, y \geq 0$ on a

$$f(x+y) = f(x)f(y).$$

b. En déduire que $f$ est positive et que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $f(n) = 2^n$.

c. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{Q}_+$ on a $f(x) = 2^x$.

d. Calculer $f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+$.

# 4 Troisième partie

Soit $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de polynômes de $E = \mathbb{R}[X]$ telle que $V_0 \in E_0 = \mathbb{R}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$ on ait

$$D(V_{n+1}) = V_n.$$

8. Montrer qu'il existe une suite réelle $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ unique telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on ait

$$V_n = \sum_{i=0}^{n} a_{n-i} U_i.$$

9. Montrer que la série de fonctions $\sum |V_n(x)|$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+$ si et seulement si la série $\sum a_n$ est absolument convergente.

10. Dans le cas où la série $\sum a_n$ est absolument convergente, calculer la somme $\sum_{n=0}^{+\infty} V_n(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+$.

# Epreuve de mathématiques

Ecole Centrale Casablanca

Mars 2019

**Exercice 1.**

L'objet de cet exercice est l'étude du comportement quand $n$ tend vers l'infini de

$$I_n = \int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+x^2)^n} \mathrm{d}x.$$

1. (a) Montrer la convergence et calculer la valeur de $I_1$.
   (b) Justifier que pour tout $n \geq 2$, $I_n$ est une intégrale impropre convergente.
   (c) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $I_n > 0$.
2. Justifier que $I_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

Dans la suite du problème, on souhaite préciser la vitesse à laquelle cette convergence vers 0 a lieu. On notera

$$\forall n \geq 1, \quad u_n = \sqrt{n} I_n.$$

3. (a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\lim_{A\to+\infty} \int_0^A \frac{x}{2} \times \frac{2x}{(1+x^2)^{n+1}} \mathrm{d}x = \frac{1}{2n} I_n.$$

   (b) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$I_{n+1} = \left(1 - \frac{1}{2n}\right) I_n.$$

4. (a) Montrer que pour tout $a > -1$, $\sqrt{1+a} \leq 1 + \frac{a}{2}$.
   (b) En déduire que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante.
5. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers une limite finie $\ell \geq 0$.
6. (a) Démontrer que pour tout $t \geq 0$, $e^t \geq 1 + t$.

(b) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$I_n \geq \int_0^{+\infty} e^{-nx^2} \mathrm{d}x.$$

(c) En déduire que $\ell > 0$.

7. Conclure en donnant un équivalent simple de $I_n$ quand $n \to +\infty$.

**Exercice 2.**

Dans cet exercice, on étudie un critère qui permet d'assurer que deux matrices ont un vecteur propre commun. Soit $n \geqslant 1$. On note $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ l'espace des matrices à coefficients complexes de taille $n \times n$. On considère deux matrices $A$ et $B$ appartenant à $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

1. Justifier que $A$ admet au moins un vecteur propre. Dans la suite on notera $\alpha$ la valeur propre associée.
2. On suppose que $AB = BA$.
   (a) Montrer que $\mathrm{Ker}(A - \alpha I_n)$ est stable par $B$.
   (b) En déduire que $A$ et $B$ ont un vecteur propre commun.
3. On suppose qu'il existe $\beta$ un complexe non-nul tel que $AB - BA = \beta A$. On note pour tout $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $\Phi(M) = MB - BM$.
   (a) Montrer que $\Phi$ est un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.
   (b) Montrer que : $\forall k \in \mathbb{N}^*,\ \Phi(A^k) = k\beta A^k$.
   (c) En déduire que $A$ est nilpotente et que $\mathrm{Ker} A \neq \{0\}$.
   (d) En déduire que $A$ et $B$ ont un vecteur propre commun.

**Exercice 3.**

On considère deux variables aléatoires $X$ et $Y$ sur un même espace probabilisé, on suppose que $X(\Omega) = Y(\Omega) = [\![1, n+1]\!]$ (l'ensemble des entiers compris entre 1 et $n+1$ au sens large) et qu'il existe une constante réelle $\lambda$ telle que pour tout couple $(i, j) \in [\![1, n+1]\!]^2$,

$$\mathbb{P}([X = i] \cap [Y = j]) = \lambda \binom{n}{i-1} \binom{n}{j-1}.$$

1. Montrer que $\lambda = \dfrac{1}{4^n}$.
2. Déterminer les lois marginales de $X$ et $Y$.

3. Les variables $X$ et $Y$ sont-elles indépendantes ?
4. Justifier que $X-1$ suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres.
5. En déduire l'espérance et la variance de $X$.
6. Soit $B \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$ la matrice définie par $b_{i,j} = \mathbb{P}_{(X=j)}(Y=i)$.
   (a) Calculer $B^2$.
   (b) La matrice $B$ est-elle diagonalisable ? Déterminer la dimension des sous-espaces propres de $B$.

## 2018-1

**École Centrale Casablanca**
Concours d'admission 2018

# Épreuve de mathématiques

On rappelle que la dérivée d'ordre $n$ d'une application $f$ est notée $f^{(n)}(x)$, avec la convention $f^{(0)}(x) = f(x)$.

## 1 Partie I

1. Rappeler la définition d'une fonction développable en série entière au voisinage de $0$.
2. Soit la fonction $f$ définie par :

$$f(x) = e^{-1/x^2} \quad \text{pour } x \neq 0 \quad \text{et } f(0) = 0.$$

Prouver que $f$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

**Indication :** montrer par récurrence que les dérivées sont du type $f^{(n)}(x) = \frac{P_n(x)}{Q_n(x)} e^{-1/x^2}$ sur $\mathbb{R}^*$ avec $P_n$ et $Q_n$ polynomiaux et que les dérivées ont une limite nulle en zéro.

Prouver que $f$ n'est pas développable en série entière au voisinage de $0$.

Soit $h$ une application de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur un intervalle $J = ]-a, a[$ $(a > 0)$, et vérifiant :

$$\forall x \in [0, a[, \ \forall n \in \mathbb{N}, \quad h^{(n)}(x) \geqslant 0.$$

On note $R_N(x) = h(x) - \sum_{n=0}^{N} \frac{h^{(n)}(0)}{n!} x^n$.

3. Montrer que $R_N$ peut s'écrire à l'aide d'une intégrale :

$$R_N(x) = x^{N+1} \int_0^1 \frac{(1-u)^N h^{(N+1)}(ux)}{N!} du.$$

**Indication :** utiliser la formule de Taylor avec reste intégral et un changement de variable.

4. Pour tout couple $(x, y)$ vérifiant $0 < x < y < a$, montrer que

$$0 \leqslant R_N(x) \leqslant \left(\frac{x}{y}\right)^{N+1} R_N(y) \leqslant \left(\frac{x}{y}\right)^{N+1} h(y).$$

5. En déduire que $h$ est somme de sa série de Taylor sur $[0, a[$.

## 2 Partie II

Soit $g$ l'application définie sur $I = \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ par $g(x) = \tan x$.

6. Prouver, pour tout $n \geqslant 0$, l'existence d'un polynôme $P_n$, dont on donnera le degré, tel que pour tout $x$ appartenant à $I$, on ait :

$$g^{(n)}(x) = P_n(\tan x).$$

7. Montrer que les coefficients de $P_n$ sont des entiers positifs ou nuls.

On note $a_n = g^{(2n+1)}(0)$. On s'intéresse à la série de Taylor de la fonction $g$ en $0$, c'est-à-dire à la série $\sum_{n\geqslant 0} \frac{a_n}{(2n+1)!} x^{2n+1}$. On note $S(x)$ la somme de cette série lorsqu'elle converge.

8. Prouver que $\forall x \in I,\ S(x) = \tan x$.
   **Indication :** utiliser le résultat de la partie I.
9. Quel est le rayon de convergence de la série entière $S$ ?

## 3 Partie III

Le but de cette partie est de redémontrer que $g$ est développable en série entière au voisinage de $0$.

Soit $\mathcal{S}$ l'ensemble des suites réelles $s = (s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant :

$$\exists (M,K) \in (]0,+\infty[)^2,\ \forall n \in \mathbb{N},\quad |s_n| \leqslant MK^n.$$

Notons que dans la définition de $\mathcal{S}$, les scalaires $M$ et $K$ dépendent de la suite $s$.

10. Montrer que $\mathcal{S}$ a une structure d'espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.

On considère la loi $\otimes$ définie par $a \otimes b = c$ avec, pour tout $n$, $c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$.

11. Montrer que $\mathcal{S}$ est stable pour la loi $\otimes$.
12. Déterminer un élément neutre pour la loi $\otimes$ sur $\mathcal{S}$, noté $e$.

Soit $a$ un élément de $\mathcal{S}$ tel que $a_0 = 1$.

13. Montrer qu'il existe une unique suite $b$ telle que $a \otimes b = e$.
    **Indication :** on pourra raisonner par récurrence forte.
14. Soit $(M,K) \in (]0,+\infty[)^2$ tel que $\forall n \in \mathbb{N},\ |a_n| \leqslant MK^n$.
    Trouver un couple $(M',K')$ tel que $\forall n \in \mathbb{N},\ |b_n| \leqslant M'K'^n$. En déduire que $b$ est dans $\mathcal{S}$.
15. Soit $s$ un élément de $\mathcal{S}$. Que peut-on dire du rayon de convergence de la série entière $\sum_{n=0}^{+\infty} s_n x^n$ ?
16. Inversement, soit $\sum_{n=0}^{+\infty} s_n x^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$. La suite $s = (s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est-elle dans $\mathcal{S}$ ?
17. Soit $h$ une fonction développable en série entière sur $]-R,R[$ vérifiant $h(0) = 1$.
    En utilisant ce qui précède, montrer que $\frac{1}{h}$ est développable en série entière au voisinage de $0$.
18. En déduire que la fonction tangente est développable en série entière au voisinage de $0$.

## 2018-2

**École Centrale Casablanca**
Concours d'admission 2018

# Épreuve de mathématiques

Dans tout le problème, $I$ désigne un intervalle non majoré de $\mathbb{R}$.
Le but du problème est l'étude des solutions de l'équation différentielle

$$E_f : y' - y + f(x) = 0$$

où $f$ est une application continue définie sur $I$ et à valeurs réelles ou complexes.
On verra que l'espace des solutions contient une solution $f_1$ ayant un comportement particulier en $+\infty$.
Les parties I et II portent sur deux exemples. La partie III met en place l'application $\Phi : f \mapsto f_1$ dans un cadre général.
Les symboles $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$ désignent respectivement les corps des nombres réels et des nombres complexes.

## 1 Partie I - Étude d'un premier exemple

1. Pour $x \in \mathbb{R}$, montrer l'existence et donner la valeur des expressions suivantes :
$$e^x \int_x^{+\infty} e^{-t} \cos t \, dt, \quad e^x \int_x^{+\infty} e^{-t} \sin t \, dt$$
2. On considère l'équation différentielle
$$y' - y + \cos x = 0, \ \ x \in \mathbb{R}.$$
Déterminer une fonction $Y_0$ bornée et une fonction $g$ telles que la solution générale sur $\mathbb{R}$ de cette équation différentielle puisse se mettre sous la forme
$$Y_\lambda(x) = \lambda g(x) + Y_0(x), \ \text{ où } \lambda \in \mathbb{R}.$$
**Indication :** utiliser la méthode de variation de la constante.
Donner sans démonstration le résultat analogue relatif à l'équation différentielle $y' - y + \sin x = 0$.

Soit $\Pi$ le plan vectoriel engendré par les fonctions *cosinus* et *sinus* dans l'espace vectoriel des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, c'est-à-dire l'ensemble des fonctions de la forme
$$x \mapsto \alpha \cos x + \beta \sin x$$
où $\alpha$ et $\beta$ sont des nombres réels. Pour tout $f \in \Pi$, on définit $f_1$ par la formule
$$\forall x \in \mathbb{R}, \ f_1(x) = e^x \int_x^{+\infty} e^{-t} f(t) \, dt.$$

3. Montrer que la transformation $f \mapsto f_1$ définit une application $\Phi : \Pi \to \Pi$. La linéarité de $\Phi$ étant considérée comme évidente, donner la matrice de $\Phi$ dans la base de $\Pi$ constituée des fonctions *cosinus* et *sinus*.
4. On munit $\Pi$ de la norme
$$\|f\|_\infty = \sup_{x \in \mathbb{R}} |f(x)|.$$
Déterminer une constante $0 < k < 1$ telle que, pour tout $f \in \Pi$, on ait
$$\|f_1\|_\infty \leqslant k \, \|f\|_\infty.$$
5. Pour $f \in \Pi$, on définit par récurrence la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ où $f_1 = \Phi(f)$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $f_{n+1} = \Phi(f_n)$.
Montrer que la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge uniformément (i.e. relativement à la norme définie sur $\Pi$) sur $\mathbb{R}$ vers la fonction nulle.

## 2 Partie II - Étude d'un deuxième exemple

On donne, pour $x > 0$, l'équation différentielle

$$y' - y + \frac{1}{x} = 0.$$

6. Montrer qu'il existe sur l'intervalle $]0, +\infty[$ une unique solution $Y_0$ bornée quand $x$ tend vers l'infini et exprimer $Y_0(x)$ sous forme d'une intégrale.

   Quelle expression donner à la solution générale $Y_\lambda$, où $\lambda \in \mathbb{R}$, l'indexation étant telle que pour $\lambda = 0$, on ait la solution bornée $Y_0$ ? Étudier le comportement de $Y_\lambda(x)$ lorsque $x$ tend vers 0 par valeurs positives.

   On note $\mathcal{C}_\lambda$ la courbe représentative de la solution $Y_\lambda$.

Pour tout point $m(x_m, y_m)$ du demi-plan $x > 0$, on note $Y_m$ la solution de l'équation vérifiant $Y_m(x_m) = y_m$ et $\mathcal{C}_m$ sa courbe représentative.

7. Justifier l'existence et l'unicité de $Y_m$.
8. Déterminer l'ensemble $\mathcal{H}$ des points $m$ tels que $Y_m'(x_m) = 0$. Même question pour l'ensemble $\mathcal{I}$ des $m$ tels que $Y_m''(x_m) = 0$. Donner sans démonstration une interprétation géométrique pour chacun des ensembles $\mathcal{H}$ et $\mathcal{I}$.
9. Quelle est la place de la courbe $\mathcal{C}_0$ représentative de la solution $Y_0$ par rapport aux courbes $\mathcal{H}$ et $\mathcal{I}$ ?

   **Indication :** on pourra faire des intégrations par parties sur $Y_0(x) = e^x \int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt$.
10. Tracer sans explication sur un même dessin des ébauches des courbes $\mathcal{H}$, $\mathcal{I}$, $\mathcal{C}_0$, $\mathcal{C}_{\lambda_1}$, $\mathcal{C}_{\lambda_2}$, où $\lambda_1$ et $\lambda_2$ sont des réels respectivement négatif et positif.

## 3 Partie III - La transformation $\Phi$

On suppose maintenant que $I$ est un intervalle ouvert de la forme $]a, +\infty[$, $a$ pouvant être égal à $-\infty$.
Dans le $\mathbb{C}$-espace vectoriel $\mathcal{C}^0(I, \mathbb{C})$ des fonctions continues sur $I$ à valeurs complexes, on considère le sous-ensemble

$$\mathcal{E} = \left\{ f \mid \exists \alpha \in \mathbb{R},\ \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x^\alpha} = 0 \right\}.$$

Autrement dit, $\mathcal{E}$ est l'ensemble des fonctions $f$ négligeables en $+\infty$ devant une certaine fonction puissance $x \mapsto x^\alpha$ ($\alpha$ dépendant de $f$).

11. Montrer que $\mathcal{E}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}^0(I, \mathbb{C})$.
12. Soit $f$ continue intégrable sur un intervalle $[x_0, +\infty[$. Soit $g$ continue positive intégrable sur $[x_0, +\infty[$. On pose $F(x) = \int_x^{+\infty} f(t)\,dt$ et $G(x) = \int_x^{+\infty} g(t)\,dt$ pour $x \geq x_0$.

    Montrer $\quad f =_{+\infty} o(g) \implies F =_{+\infty} o(G)$.

    ($f =_{+\infty} o(g)$ signifie $f$ négligeable devant $g$ au voisinage de l'infini)

    **Indication :** revenir à la définition de la limite avec les $\varepsilon$.
13. Soit $\alpha$ un réel fixé. Résoudre dans $\mathbb{R}^{+*}$

    $$t^\alpha e^{-t} \leqslant 2(t^\alpha e^{-t} - \alpha t^{\alpha-1} e^{-t}).$$

    En intégrant l'inégalité précédente, montrer qu'il existe $X$ tel que

    $$x \geqslant X \implies \int_x^{+\infty} t^\alpha e^{-t}\,dt \leqslant 2x^\alpha e^{-x}.$$

Étant donné $f \in \mathcal{E}$ et $x \in I$, on considère l'équation différentielle

$$E_f : y' - y + f(x) = 0.$$

14. Montrer que $E_f$ admet une unique solution $f_1 \in \mathcal{E}$ définie par la formule

$$\forall x \in I,\ f_1(x) = e^x \int_x^{+\infty} e^{-t} f(t)\,dt.$$

**Indication :** utiliser les questions 12. et 13. pour montrer $f_1 \in \mathcal{E}$.

On définit l'application $\Phi : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ par $\Phi(f) = f_1$ ; elle est évidemment linéaire.

15. Soit $\Phi^n$ la composée $n$ fois de $\Phi$ avec elle-même. Pour $f \in \mathcal{E}$, on pose $f_n = \Phi^n(f)$ (avec $f_0 = f = \Phi^0(f)$). Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes :
    (i) la suite $(f_n)$ converge uniformément sur tout segment de $I$,
    (ii) la suite $(f_n)$ converge uniformément vers une constante sur tout segment de $I$.

    **Indication :** pour montrer (i) $\Longrightarrow$ (ii), montrer d'abord que la suite $(f_n')$ converge uniformément vers la fonction nulle.

16. Montrer que

$$\forall x \in I, \forall n \in \mathbb{N}^*,\ f_{n+1}(x) = e^x \int_x^{+\infty} \frac{(t-x)^n}{n!} f(t) e^{-t}\,dt = \int_0^{+\infty} \frac{u^n}{n!} f(x+u) e^{-u}\,du.$$

**Indication :** on pourra raisonner par récurrence en écrivant $f_{n+1} = \Phi^n(f_1)$ et intégrer par parties.

17. L'application linéaire

$$\Phi : \mathcal{E} \to \mathcal{E},\ f \mapsto f_1$$

est-elle injective ? Montrer que l'image de $\Phi$ est l'ensemble des applications $g \in \mathcal{C}^1(I, \mathbb{C})$ telles que $g \in \mathcal{E}$ et $g' \in \mathcal{E}$.

École Centrale Casablanca
Concours d'admission 2017

# Épreuve de mathématiques

## 1 Première partie

Étant donné un entier $n$ strictement positif ($n \geqslant 1$), soient $S_n$ et $I_n$ les deux réels définis par les relations ci-dessous :

$$S_n = \sum_{i=0}^{n-1}\left(\sum_{j=0}^{n-1}\frac{1}{i+j+1}\right) \quad ; \quad I_n = \int_0^n dx \int_0^n \frac{dy}{x+y+1}.$$

**Intégrale $I_n$**

1. Calculer, pour toute valeur de l'entier strictement positif $n$, l'intégrale $I_n$.
2. Déterminer les constantes $A$, $B$, $C$ et $D$ figurant dans le développement limité de la fonction $n \mapsto I_n$ à l'infini qui s'écrit sous la forme suivante :

$$I_n = An + B\ln n + C + \frac{D}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right).$$

**Somme $S_n$**

3. En admettant que $I_n = \iint_{[0,n]^2} \frac{1}{x+y+1}\,dx\,dy$ ainsi que l'additivité et la positivité de l'intégrale double, établir l'encadrement suivant de $S_n$ à l'aide de $I_n$ : $I_n \leqslant S_n \leqslant I_n + 2\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i} - 1$.
4. En déduire que la somme $S_n$ est équivalente à l'infini à $2n\ln 2$.

Soit $J_n$ l'intégrale suivante :

$$J_n = \int_0^1 \left(\sum_{k=0}^{n-1} x^k\right)^2 dx.$$

**Intégrale $J_n$**

5. Déterminer la relation qui lie l'intégrale $J_n$ au réel $S_n$. En déduire, lorsque l'entier $n$ croît indéfiniment, un équivalent de $J_n$ à l'infini.

## 2 Deuxième partie

Soit $E$ un espace préhilbertien réel (i.e. un espace vectoriel réel muni d'un produit scalaire); soit $(x,y) \mapsto (x \mid y)$ le produit scalaire de cet espace. La norme d'un vecteur $x$ de $E$, déduite de ce produit scalaire est notée $\|x\|$.
Étant donné un réel $\mu$ supérieur ou égal à 1 ($\mu \geqslant 1$), une suite de $n$ vecteurs d'un espace euclidien $E_n$, de dimension finie $n$, $x_1, x_2, \ldots, x_n$ est dite $\mu$-presque orthogonale (en abrégé $\mu$-p.o.) si et seulement si :

ii. les vecteurs $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sont de norme unité,

ii. pour toute suite finie de $n$ réels $a_1, a_2, \ldots, a_n$ la norme du vecteur $\sum_{i=1}^{n} a_i x_i$ vérifie la double inégalité suivante :

$$\frac{1}{\mu}\sum_{i=1}^{n}(a_i)^2 \leqslant \left\|\sum_{i=1}^{n} a_i x_i\right\|^2 \leqslant \mu \sum_{i=1}^{n}(a_i)^2.$$

Plus généralement : une suite dénombrable $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de vecteurs unitaires d'un espace préhilbertien réel est dite presque orthogonale (p.o.), si et seulement s'il existe un réel $\mu \geqslant 1$ tel que, pour tout entier $n$ strictement positif, pour toute suite extraite $x_{k_1}, x_{k_2}, \ldots, x_{k_n}$ de la suite $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ et pour toute suite finie de $n$ réels $a_1, a_2, \ldots a_n$, la norme du vecteur $\sum_{i=1}^{n} a_i x_{k_i}$ vérifie la relation suivante :

$$\frac{1}{\mu}\sum_{i=1}^{n}(a_i)^2 \leqslant \left\|\sum_{i=1}^{n} a_i x_{k_i}\right\|^2 \leqslant \mu \sum_{i=1}^{n}(a_i)^2.$$

Remarque : la suite des indices $k_1, k_2, \ldots, k_n$ de la suite extraite $x_{k_1}, x_{k_2}, \ldots, x_{k_n}$, est une suite monotone strictement croissante $k_1 < k_2 < \ldots < k_n$.

**Premières propriétés**

Soit $E_n$ un espace euclidien de dimension $n$.

6. Démontrer que, pour qu'une suite de $n$ vecteurs $x_1, x_2, \ldots, x_n$ soit une base orthonormée de $E_n$, il faut et il suffit qu'elle soit une suite 1-presque orthogonale.
7. Démontrer que, si une suite de $n$ vecteurs $x_1, x_2, \ldots, x_n$ de $E_n$ est $\mu$-presque orthogonale, la suite est libre.

**Un exemple**

Soit $E$ l'espace vectoriel des fonctions réelles définies et continues sur le segment $[0,1]$ ; le produit scalaire de deux fonctions $f$ et $g$ de $E$ est défini par la relation suivante :

$$(f \mid g) = \int_0^1 f(x)g(x)\,dx.$$

Soit $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite des fonctions de $E$ définies par la relation suivante :

$$P_n(x) = \sqrt{2n+1}\,x^n.$$

8. Démontrer que, bien que la suite des fonctions $P_n$ de norme unité soit libre, la suite $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas presque orthogonale. **Indication :** on pourra introduire le polynôme $R_n = \sum_{k=0}^{n-1} X^k$ et montrer que la $\mu$-presque orthogonalité implique $J_n \leqslant \mu \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k}$.

Soit $(V_1, V_2, \ldots, V_n)$ une suite libre de $n$ vecteurs indépendants unitaires d'un espace euclidien $E_n$ de dimension $n$. Soit $M$ la matrice carrée d'ordre $n$ dont les éléments $m_{i,j}$ sont égaux aux produits scalaires des vecteurs $V_i$ et $V_j$.

$$M = (m_{i,j}) \quad ; \quad m_{i,j} = (V_i \mid V_j).$$

Étant donnée une suite de $n$ réels $a_1, a_2, \ldots, a_n$, soit $A$ le vecteur de $\mathbb{R}^n$ de coordonnées $a_1, a_2, \ldots, a_n$ et $W$ le vecteur égal à la combinaison linéaire des vecteurs $V_1, V_2, \ldots, V_n$ avec les coefficients $a_1, a_2, \ldots, a_n$ :

$$A = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \ldots \\ a_n \end{pmatrix} \quad ; \quad W = \sum_{i=1}^{n} a_i V_i.$$

**La suite de vecteurs $(V_1, V_2, \ldots, V_n)$ est $\mu$-presque orthogonale**

9. Démontrer l'existence d'une matrice carrée $P$ orthogonale et d'une matrice diagonale $D$ dont tous les éléments de la diagonale sont différents de 0, telles que :

$$M = {}^tPDP.$$

**Indication :** on pourra montrer que $MA = 0 \Rightarrow A = 0$.

10. Établir la relation qui lie la norme du vecteur $W$ au réel ${}^tAMA$ ; ${}^tA$ désigne la matrice transposée de la matrice colonne $A$.
11. En déduire que les éléments diagonaux de la matrice $D$ sont strictement positifs, puis en déduire un encadrement de la norme du vecteur $W$ à l'aide des valeurs propres de la matrice $M$ et de la norme du vecteur $B$ égal à l'image par la matrice $P$ du vecteur $A$ $(B = PA)$.
12. En déduire que la suite $(V_1, V_2, \ldots, V_n)$ est $\mu$-presque orthogonale ; préciser des valeurs possibles pour le réel $\mu$.

Soit maintenant $(V_n)_{n\geqslant 1}$ une suite dénombrable de vecteurs unitaires d'un espace préhilbertien réel $E$.

**Une condition suffisante**

On suppose qu'il existe un réel $\alpha$, strictement supérieur à 3 $(\alpha > 3)$, tel que le produit scalaire de deux vecteurs $V_p$ et $V_q$ soit majoré en valeur absolue par le réel $\alpha^{-|p-q|}$, c'est-à-dire :

$$\left|(V_p \mid V_q)\right| \leqslant \frac{1}{\alpha^{|p-q|}}.$$

Soit un entier $n \geqslant 1$ et $k_1 < k_2 < \ldots < k_n$ une suite d'indices supérieurs ou égaux à 1, on note $N = \left((V_{k_i} \mid V_{k_j})\right)_{1\leqslant i,j\leqslant n}$.

13. Soit $\lambda$ une valeur propre de $N$ et $(x_1, \ldots, x_n)$ un vecteur propre associé. En choisissant $i$ tel que $|x_i|$ soit maximal, montrer que

$$|\lambda - 1||x_i| \leqslant |x_i| \sum_{p=1}^{\infty} \frac{2}{\alpha^p}.$$

14. En déduire un encadrement des valeurs propres de la matrice $N$.
15. Montrer que la suite $(V_n)_{n\geqslant 1}$ est libre.
16. En déduire que la suite $(V_n)_{n\geqslant 1}$ est presque orthogonale.

## 3 Troisième partie

17. Soit $f$ la fonction définie dans le quart de plan $[1, \infty[\times[1, \infty[$ par la relation suivante :

$$f(x, y) = \frac{\sqrt{2y+1}\sqrt{2xy+1}}{y + xy + 1}.$$

Soit $G$ la fonction, définie sur la demi-droite $[1, \infty[$, par la relation suivante :

$$G(x) = \lim_{y\to\infty} f(x, y).$$

Étudier les variations des six fonctions définies sur la demi-droite fermée $[1,\infty[$ par les relations suivantes :

$$x \mapsto f(x,1) \quad ; \quad y \mapsto f(1,y) \quad ; \quad G : x \mapsto \lim_{y\to\infty} f(x,y);$$

$$y \mapsto \lim_{x\to\infty} f(x,y) \quad ; \quad f_y : x \mapsto f(x,y) \quad ; \quad f_x : y \mapsto f(x,y).$$

18. Soit $\delta$ un réel strictement compris entre 0 et 1 ($0 < \delta < 1$). Démontrer l'existence d'une fonction $\varphi_\delta$, définie sur la demi-droite fermée $[1,\infty[$, telle que, pour tout réel $y$ de la demi-droite $[1,\infty[$, la relation ci-dessous soit vérifiée :

$$f(\varphi_\delta(y), y) = \delta.$$

Démontrer l'existence d'un réel $\beta$ tel que la fonction $G$, définie ci-dessus, prenne la valeur $\delta$ en ce point : $G(\beta) = \delta$. Démontrer que ce réel $\beta$ est strictement supérieur à 1 et est un minorant de l'image par $\varphi_\delta$ de la demi droite fermée $[1,\infty[$.

Soit $(P_{k_i})$ une suite extraite de la suite des polynômes considérés à la question 8. L'application $i \mapsto k_i$ est une suite strictement croissante. Pour simplifier les notations, soit $Q_i$ le polynôme $P_{k_i}$ :

$$Q_i = P_{k_i}.$$

19. On choisit une suite $(k_i)_{i\geqslant 0}$ telle que la suite $(Q_i)_{i\geqslant 0}$ soit presque orthogonale.
Démontrer que le réel $\mu$ entrant dans la définition de la presque orthogonalité est strictement supérieur à 1 ($\mu > 1$).

**École Centrale Casablanca**
Concours d'admission 2016

# Épreuve de mathématiques

Soit

$$P_n(X) = X(X-1)\cdots(X-n).$$

On rappelle la formule de Stirling

$$n! \sim \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n \quad \text{quand } n \to +\infty.$$

***Les parties I et II sont indépendantes.***

## I. Quelques propriétés des racines de $P_n'$

1) Montrer que, pour tout $n \geq 1$, $P_n'$ admet exactement une racine $x_{n,k}$ dans chacun des intervalles $]k, k+1[$, pour $k = 0, \ldots, n-1$.

Notons $\alpha_{n,k} = x_{n,k} - k \in ]0,1[$, la partie fractionnaire de $x_{n,k}$.

2) Pour $n \geq 1$, en calculant les coefficients de degré $n-1$ et $n$ de $P_n'$, exprimer $\sum_{k=0}^{n-1} x_{n,k}$, puis $\sum_{k=0}^{n-1} \alpha_{n,k}$ en fonction de $n$.

3) En comparant $P_n(X)$ et $P_n(n-X)$, exprimer $x_{n,n-1-k}$ en fonction de $x_{n,k}$, pour tout $n \geq 1$, et pour tout $k = 0, \ldots, n-1$.

4) Déterminer la valeur de $\alpha_{n,k} + \alpha_{n,n-1-k}$.

Le but des questions suivantes est de montrer que, $n$ étant fixé, la suite des $\alpha_{n,k}$ croît lorsque $k$ croît de 0 à $n-1$.

5) Pour tout $n \geq 1$, dresser, en fonction de la parité de $n$, le tableau de variations de $P_n$.

6) En déduire le signe de $(-1)^{n-k}P_n(x_{n,k})$ pour $k = 0, 1, \cdots, n-1$.

7) En utilisant la relation $P_n(X) = (X-n)P_{n-1}(X)$, déterminer le signe de $(-1)^{n-k}P_n'(x_{n-1,k})$ pour $k = 0, 1, \cdots, n-2$.

8) En déduire que pour $k = 0, 1, \cdots, n-2$, on a $x_{n-1,k} > x_{n,k}$.

9) En utilisant l'idendité $P_n(X) = XP_{n-1}(X-1)$, déterminer, en fonction de $k$ et $n$, le signe de $(-1)^{n-k}P_n'(1 + x_{n-1,k-1})$ pour $k = 1, \cdots, n-1$.

10) En déduire que pour $k = 1, \cdots, n-1$, on a $x_{n,k} > 1 + x_{n-1,k-1}$.

11) Conclure.

# II. Un développement asymptotique

Pour $x \in \mathbb{R}$, on considère la fonction $h_x$ définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $h_x(t) = t^{x-1}e^{-t}$.

12) Déterminer $\mathcal{E} = \{x \in \mathbb{R} \mid h_x \text{ est intégrable sur } ]0, +\infty[\}$.

Pour $x \in \mathcal{E}$, on pose

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}dt.$$

13) Montrer que $\Gamma$ est strictement positive sur $\mathcal{E}$.

14) Montrer que $\Gamma$ est deux fois dérivable sur $\mathcal{E}$.

15) Exprimer pour tout $x \in \mathcal{E}$, $\Gamma(x+1)$ en fonction de $x$ et $\Gamma(x)$.

Donner $\Gamma(n)$ pour $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

Désormais, on pose, pour tout $x \in \mathcal{E}$,

$$\Psi(x) = \frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)}.$$

16) Montrer que $\Psi$ est strictement croissante.

17) Établir, que pour tout $x \in \mathcal{E}$,

$$\Psi(x+1) = \Psi(x) + \frac{1}{x}.$$

Le but des questions suivantes est de montrer que, pour tout $x > 0$,

$$\lim_{m \to +\infty} \left[ \Psi(x) + \sum_{j=0}^{m} \frac{1}{x+j} - \ln m \right] = 0.$$

On pose pour tout $x > 0$,

$$\phi(x) = \Psi(x) - \ln(x).$$

18) Montrer que la série de terme général $(\phi(n+1) - \phi(n))$ converge.

19) Montrer que la suite $(\phi(n), n \geq 1)$ converge lorsque l'entier $n$ tend vers l'infini. Soit $C$ sa limite.

20) Établir que l'on a aussi :

$$\lim_{x \to +\infty} \phi(x) = C.$$

21) Montrer que si $C \neq 0$,

$$\int_1^x \phi(t)\,\mathrm{d}t \underset{+\infty}{\sim} Cx.$$

22) Montrer que $C = 0$.

23) Conclure en considérant $\Psi(x+m+1)$.

***Consignes :***

- *L'épreuve est composée de quatre parties totalement indépendantes.*
- *On attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. En particulier, il convient d'indiquer clairement les références des questions abordées.*
- *Les applications numériques doivent êtres données avec un nombre de chiffres significatifs compatibles avec les données fournies sans oublier les unités d'expression.*
- *Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en indiquant clairement les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.*
- *Les formules rappelées en annexe ne seront pas nécessairement toutes utilisées.*
- *La calculatrice est autorisée.*

# 1ère partie : Électronique

## Modulation d'amplitude

La transmission par voie hertzienne nécessite pour des raisons physiques une fréquence élevée. Cependant, le signal véhiculant l'information que l'on souhaite transmettre est de faible fréquence. On recourt alors à la technique de modulation qui consiste à moduler un signal haute fréquence (porteuse) par le signal basse fréquence (informatif). Nous allons nous intéresser dans cette partie à la modulation d'amplitude.

On considère une porteuse sinusoïdale $e_p(t) = E_p(\cos(2\pi f_p t)$ d'amplitude $E_p = 3{,}0V$ modulée en amplitude par un signal modulant sinusoïdal (signal informatif) $e_i(t) = E_i(\cos(2\pi f_i t)$ d'amplitude $E_i = 2{,}0V$.

## 1. Modulation d'amplitude

**1.1.** Quel est le domaine de fréquences des ondes sonores audibles par l'oreille humaine ? Que vaut la célérité des ondes radio dans l'atmosphère ? Sachant que l'émission d'une onde électromagnétique nécessite une antenne dont la dimension caractéristique est une demi-longueur d'onde, citer un intérêt de la technique de modulation.

Le schéma de base du montage pour réaliser une modulation d'amplitude utilise un multiplieur de constante de multiplication $k = 0{,}1V^{-1}$ et un sommateur de gain unité (figure 1.1).

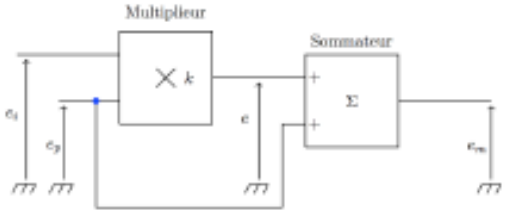


Figure 1.1 : schéma de base de la modulation d'amplitude

**1.2.** Exprimer le signal $e(t)$ de sortie du multiplieur. Dire, en le justifiant, si le multiplieur est un composant linéaire.

**1.3.** Montrer que le signal modulé en amplitude $e_m(t)$ s'exprime de la façon suivante :

$$e_m(t) = E_m \cos(2\pi f_p t)\left(1 + m\cos(2\pi f_i t)\right)$$

Exprimer $E_m$ et le taux de modulation $m$ en fonction des données.

**1.4.** Représenter l'allure du signal $e_m(t)$ pour $m < 1$.

**1.5.** Représenter le spectre en amplitude du signal $e_m(t)$ en indiquant les expressions des fréquences et des amplitudes pour chaque composante fréquentielle.

L'analyse spectrale du signal $e_m(t)$ montre trois pics : un pic principal à la fréquence $f_2 = 200kHz$ et deux pics secondaires, de même amplitude, respectivement à $f_1 = 195kHz$ et à $f_3 = 205kHz$, dans le rapport de $50\%$ par rapport au pic principal.

**1.6.** Déterminer la fréquence de la porteuse $f_p$ et celle du signal modulant $f_i$.

**1.7.** Déterminer la valeur de $m$ correspondant. Que peut-on dire de la qualité de la modulation dans ce cas ?

**1.8.** Représenter le spectre en amplitude du signal $e_m(t)$ si le spectre du signal informatif occupe une plage de fréquence $\left[f_{i_1}, f_{i_2}\right]$, l'amplitude du signal informatif variant avec la fréquence $f_i$ comme indiqué figure 1.2.

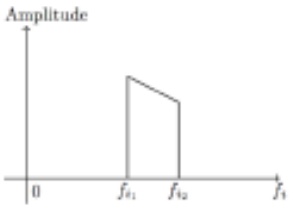


Figure 1.2 : spectre du signal informatif

**1.9.** Quelle est la largeur $\Delta f$ de la bande spectrale occupée par le signal modulé en amplitude ?

**1.10.** Évaluer l'écart minimal de fréquence qui doit exister entre les fréquences des porteuses de deux émetteurs pour que leurs émissions ne soient pas mutuellement brouillées.

## 2. Démodulation d'amplitude par détection synchrone

La détection synchrone permet d'extraire des signaux de faible amplitude dans une bande de fréquence donnée, même noyés, dans du bruit important par multiplication du signal avec un signal sinusoïdal de fréquence identique à la porteuse. Cette détection comprend un multiplieur et un filtre adapté au signal à extraire (figure 1.3). On place, sur la première entrée du multiplieur, le signal à démoduler réceptionné par voie hertzienne, dont l'équation est :

$$e_m(t) = E_m \cos(2\pi f_p t)\left(1 + m\cos(2\pi f_i t)\right)$$

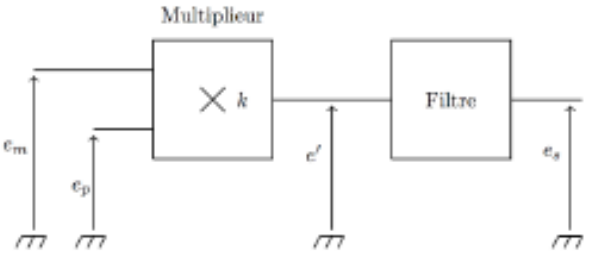


Figure 1.3 : schéma de base de la démodulation synchrone

et on impose, sur la seconde entrée, la tension $e_p(t) = E_p(\cos(2\pi f_p t)$.

**2.1.** Représenter, en le justifiant, le spectre du signal $e'(t)$ en sortie du multiplieur, en indiquant l'amplitude des différentes composantes spectrales.

On propose les caractéristiques du filtre utilisé (figures 1.4.a et 1.4.b) :

Fonction de transfert : $\underline{H_1}(jf) = \dfrac{H_0}{1+\left(j\dfrac{f}{f_0}\right)^n}$

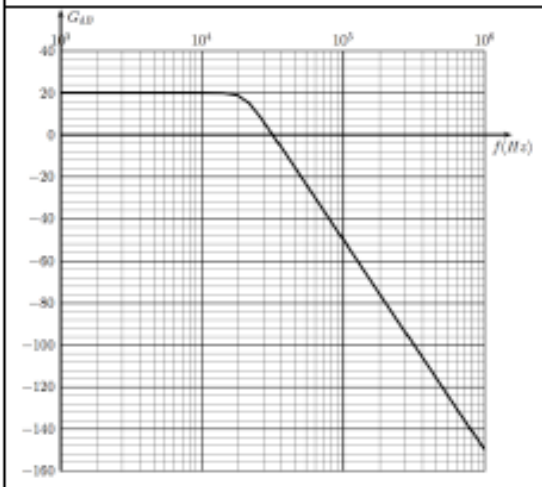



figure 1.4.a : diagrammes de Bode en amplitude

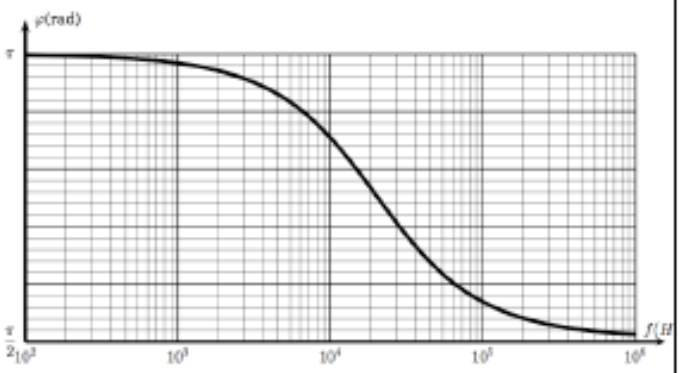



figure 1.4.b : diagrammes de Bode en phase

**2.2.** Dire, en justifiant la réponse, quelle est la nature du filtre employé pour sélectionner le signal informatif. Quelle condition doit satisfaire sa fréquence de coupure $f_c$ ?

**2.3.** Déduire des caractéristiques fournies la fréquence de coupure $f_c$ du filtre sélectionné.

Afin de déterminer les paramètres du filtre employé (l'ordre $n$ et le gain $H_0$), on mesure la valeur absolue du gain, à une fréquence donnée. On trouve $|G| = 50dB$ pour $f = 100kHz$.

**2.4.** En exploitant le diagramme de Bode fourni, déterminer le gan statique $H_0$ et l'ordre $n$ du filtre employé.

**2.5.** Exprimer la tension $e_s(t)$ en sortie du filtre sélectionné.

**2.6.** Expliquer comment récupérer le signal informatif de fréquence $f_i$ à partir de $e_s(t)$.

# 2ème partie : Électromagnétisme

## Approche énergétique de l'effet de peau

Le demi-espace $z \geq 0$ est occupé par un milieu conducteur métallique ohmique de conductivité $\gamma$. La surface du conducteur, supposée plane et d'extension infinie, coïncide avec le plan $(Oxy)$ et est surmontée par l'air assimilé au vide. Dans ce conducteur règne le champ électrique $\underline{\vec{E}} = E_0 e^{-\alpha z} \exp(i(\omega t - \alpha z))\vec{e}_x$. On associe au milieu le repère $R(O,x,y,z)$ auquel on associe la base cartésienne orthonormée directe $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$. On repère un point $M$ de l'espace par ses coordonnées cartésiennes $x$, $y$ et $z$. On note $\varepsilon_0$ et $\mu_0$ respectivement la permittivité électrique et la perméabilité magnétique du vide.

**Données :**

- Équations de Maxwell dans le conducteur assimilé au vide :

$$div\vec{E}=0 \qquad \overrightarrow{rot}\vec{E}=-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$$

$$div\vec{B}=0 \qquad \overrightarrow{rot}\vec{B}=\mu_0\left(\vec{j}+\varepsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}\right)$$

- Loi d'Ohm locale : $\vec{j}=\gamma\vec{E}$.

**1.** Caractériser le champ électrique de l'onde dans le conducteur en précisant la direction et le sens de propagation, la planéité, l'état de polarisation. Quelle est l'unité de l'amplitude $E_0$.

**2.** Exprimer le champ magnétique $\underline{\vec{B}}$ associé à cette onde.

**3.** Déterminer la densité volumique d'énergie $u_{em}(z,t)$ et sa valeur moyenne temporelle. Comparer les contributions magnétique et électrique.

**4.** Exprimer le vecteur de Poynting $\vec{\Pi}$. En déduire sa moyenne temporelle $<\vec{\Pi}>$. Quelle est sa signification physique ? Donner son unité.

**5.** On considère un cylindre d'axe $Oz$, de section $S$ et situé entre $z$ (face d'entrée) et $z+dz$ (face de sortie).

**5.1.** Exprimer la puissance moyenne $<P_e(z)>$ entrant par la face située en $z$ et la puissance moyenne $<P_s(z+dz)>$ sortant par la face en $z+dz$.

**5.2.** Exprimer la puissance volumique moyenne dissipée par effet Joule sur la tranche de volume $Sdz$.

**5.3.** En écrivant que la puissance moyenne entrant dans le conducteur mais n'en sortant pas est cédée au conducteur, déduire la distance $\delta$ sur laquelle pénètre l'onde avant d'être atténuée. On exprimera $\delta$ en fonction de $\alpha$ puis de $\mu_0$, $\gamma$ et $\omega$.

# 3ème partie : Thermodynamique

## Onde thermique

On modélise l'intérieur du sol, supposé solide et homogène, par le demi-espace $z\geq 0$. On note $\rho$ sa masse volumique, $\lambda$ sa conductivité thermique, $c$ sa capacité thermique massique et $D=\dfrac{\lambda}{\rho c}$ sa diffusivité thermique. On néglige tout autre phénomène que la conduction thermique.

La surface du sol, supposée plane et d'extension infinie, coïncide avec le plan $(Oxy)$.

**1.** Justifier brièvement que, dans les conditions ci-dessus, la température dans le sol ne dépend que de la profondeur $z$ et du temps $t$. On posera dans la suite $T(z,t)$.

**2.** Le sol est surmonté par l'air, dont la température moyennée sur une durée assez longue évolue au rythme des jours et des saisons. On note $T_a(t)$ cette température moyennée sur une durée $T_p$, et on modélise son évolution dans le temps par une variation sinusoïdale centrée sur la valeur moyenne de la température notée $T_m$ : $T_a(t)=T_m+T_A\cos(\omega_p t)$, avec $\omega_p=\dfrac{2\pi}{T_p}$ et $T_A$ une constante. On suppose que la température du sol au contact avec l'air, en $z=0$, est la même que la température de l'air qui le surplombe : $T(0,t)=T_a(t)$.

La température du sol est régie par l'équation de la diffusion thermique :

$$\frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = \frac{1}{D}\frac{\partial T}{\partial t}$$

On cherche à déterminer $\theta(z,t) = T(z,t) - T_0$ pour $z \geq 0$. On se place en régime sinusoïdal forcé et on cherche des solution sous la forme $\theta(z,t) = \mathrm{Re}\left[\underline{\theta}(z,t)\right]$ avec $\underline{\theta}(z,t) = \underline{\theta}_A(z)e^{i\omega t}$.

**2.1.** Justifier que $\underline{\theta}(z,t)$ est solution de l'équation de diffusion thermique. Écrire l'équation différentielle régissant la fonction $\underline{\theta}_A(z)$.

**2.2.** Montrer que les solutions les plus générales s'écrivent alors sous la forme :

$$\underline{\theta}_A(z) = C_1 e^{-\frac{z}{\delta}} e^{-i\frac{z}{\delta}} + C_2 e^{+\frac{z}{\delta}} e^{+i\frac{z}{\delta}}$$

exprimer $\delta$ en fonction de $D$ et $\omega$ et préciser l'unité de cette grandeur.

**2.3.** Dans les deux termes que comporte $\underline{\theta}(z,t)$, un des deux termes est physiquement inacceptable. Expliquer pourquoi et donner la valeur de l'une des deux constantes $C_1$ et $C_2$. En écrivant la condition aux limites en $z = 0$, déduire la valeur de l'autre constante.

**2.4.** En déduire la loi $T(z,t)$ en régime établi.

**2.5.** Interpréter physiquement l'expression obtenue. Interpréter physiquement la grandeur $\delta$.

**2.6.** Exprimer puis calculer numériquement la profondeur $z_{10}$ pour laquelle l'amplitude des variations de température dans le sol est atténuée d'un facteur 10 par rapport à celle de la surface du sol dans le cas de la variation quotidienne de température ($T_j = 1\,jour$), puis dans celui de la variation annuelle de température ($T_a = 365{,}25\,jour$). On donne pour un sol humide $D = 2{,}5.10^{-7} m^2.s^{-1}$.

# 4ème partie : Quantique

## Enrichissement isotopique

En 1921 le prix Nobel de chimie a été attribué à Frederick Soddy « *pour ses contributions à notre connaissance de la chimie des substances radioactives, et ses recherches à propos de l'origine et la nature des isotopes* ». Dans cette partie, on propose d'illustrer la préparation de fractions plus riches en l'un des isotopes que le mélange initial. On souhaite utiliser le phénomène de réflexion sur une marche de potentiel pour modifier la composition isotopique du mélange.

**Données :**

- Constante de Planck réduite : $\hbar = \frac{h}{2\pi} = 1{,}05.10^{-34}\,J.s$.
- Équation de Schrödinger : $-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2 \Psi(x,t)}{\partial x^2} + V(x)\Psi(x,t) = i\hbar\frac{\partial \Psi(x,t)}{\partial t}$.

On considère une particule quantique de masse $m$ évoluant dans le potentiel $V(x)$ indépendant du temps (figure 4.1). La particule est envoyée par une source située en $x = -\infty$. $V(x)$ est composé de deux zones : une zone à potentiel nul pour $x < 0$, et une zone de potentiel $V_0$ positif pour $x > 0$ :

$$\begin{cases} V(x) = 0 & si \quad x < 0 \qquad \text{zone (1)} \\ V(x) = V_0 & \text{si} \quad x > 0 \qquad \text{zone (2)} \end{cases}$$

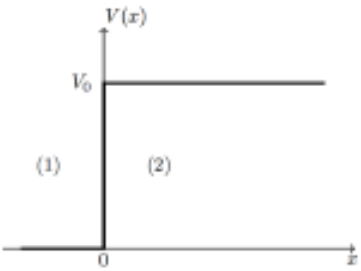



Figure 4.1 : marche de potentiel

On cherche des solutions de l'équation de Schrödinger sous forme de fonctions d'onde stationnaires d'énergie $E$ : $\psi(x,t)=\varphi(x)\exp\left(-i\frac{Et}{\hbar}\right)$. On rappelle que la fonction d'onde $\psi(x,t)$ et sa dérivée $\frac{d\psi}{dx}(x,t)$ sont continues.

## 1. Fonction d'onde

**1.1.** Vérifier l'homogénéité de l'équation de Schrödinger.

**1.2.** Donner la signification physique de la fonction d'onde $\Psi(x,t)$ et celle de $\rho(x,t)=|\Psi(x,t)|^2$ ?

**1.3.** On dit que la fonction d'onde $\Psi(x,t)$ vérifie une condition de normalisation. À quoi correspond-t-elle ? Interpréter le sens physique de cette condition.

**1.4.** Écrire l'équation de Schrödinger pour des états stationnaires.

## 2. 1^er^ cas : $E>V_0$

**2.1.** Du point de vue de la mécanique classique, montrer que, dans le cas correspondant à $E>V_0$, la particule envoyée depuis $x=-\infty$ et arrivant sur la marche de potentiel peut se déplacer partout sur l'axe $Ox$.

**2.2.** Résoudre l'équation de Schrödinger vérifiée par la fonction d'onde $\varphi(x)$ stationnaire dans les zones (1) et (2) de l'espace. Montrer que la solution générale s'écrit sous la forme :

$$\begin{cases} \varphi_1(x)=A_1e^{ik_1x}+B_1e^{-ik_1x} & si \quad x\le 0 \qquad \text{zone (1)} \\ \varphi_2(x)=A_2e^{ik_2x}+B_2e^{-ik_2x} & \text{si} \quad x\ge 0 \qquad \text{zone (2)} \end{cases}$$

Donner les expressions de $k_1$ et $k_2$ en fonction de $m$, $V_0$, $E$ et $\hbar$.

**2.3.** Exprimer $\psi_1(x,t)$ et $\psi_2(x,t)$ respectivement dans les zones (1) et (2). Commenter la forme générale de la fonction d'onde totale dans chacune des deux zones.

**2.4.** La source de particules est située en $x=-\infty$. Justifier pourquoi la constante $B_3$ est nécessairement nulle.

**2.5.** Écrire les conditions de raccordement en $x=0$ et exprimer le coefficient de réflexion en amplitude $r=\frac{B_1}{A_1}$ et celui de transmission en amplitude $t=\frac{A_2}{A_1}$ en fonction de $k_1$ et $k_2$.

**2.6.** On rappelle $\vec{j}=\frac{\hbar\vec{k}}{m}|\Psi(x,t)|^2$, le vecteur la densité de courant de probabilité d'une onde plane de vecteur d'onde $\vec{k}$. Exprimer les coefficients de réflexion $R$ et de transmission $T$ de la densité de courant de probabilité. Quelle relation a-t-on entre $R$ et $T$ ? Que traduit cette relation ?

**2.7.** La figure 2 donne le graphe de $R$ et $T$ pour $E>V_0$ en fonction de $y=\frac{E}{V_0}$. Donner les expressions approchées de $T$ et $R$ correspondant à la limite où $E>>V_0$. Identifier, en justifiant votre réponse, la courbe correspondant à $R$.

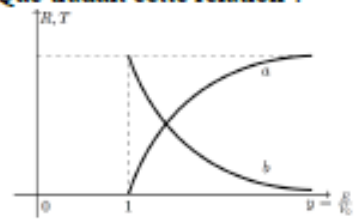



Figure 4.2 : $R$ et $T$ en fonction de $y=\frac{E}{V_0}$.

**2.8.** On se place dans le cas où $E>>V_0$. Le faisceau de particules quantiques est constitué d'un

mélange de deux isotopes de l'hydrogène, $H_1^1$ et $H_1^2$, de même vitesse, de masses respectives $m_1$ et $m_2$ et d'énergies respectives $E_1$ et $E_2$ supérieures à $V_0$. On note $R_1$ et $R_2$ leurs coefficients de réflexion respectifs.

**2.8.1.** Montrer que $R = \left(\frac{V_0}{4E}\right)^2$.

**2.8.2.** Exprimer le rapport $\frac{R_2}{R_1}$ en fonction de $\alpha = \frac{m_2}{m_1}$. Le faisceau réfléchi est-il enrichi en isotope le plus lourd ou le plus léger ?

**2.8.3.** On note $c_i$ le taux d'isotope $H_1^1$ dans le flux de particules incidentes et $c_r$ dans le flux réfléchi. Déterminer l'expression littérale de $c_r$ en fonction de $c_i$ et $\alpha$. Faire l'application pour $c_i = 0{,}81$. Que vaut ce taux en mécanique classique? Conclure.

**3.** **2$^{\text{ème}}$ cas :** $E < V_0$

**3.1.** Que prévoit la mécanique classique dans le cas correspondant à $E < V_0$ pour une particule arrivant sur la marche de potentiel depuis $x = -\infty$ ?

**3.2.** Dans la situation où $E < V_0$, l'expression de la fonction d'onde dans la région (1) peut être conservée. Expliquer comment est modifié $k_2$ et donner l'expression de la fonction d'onde $\psi_2(x,t)$ dans la zone (2) dans ce cas. Commenter la forme de la fonction d'onde $\psi_2(x,t)$ ?

**3.3.** Écrire les conditions de raccordement en $x = 0$ et $x = a$, et exprimer le coefficient de réflexion en amplitude $r = \frac{B_1}{A_1}$ et celui de transmission en amplitude $t = \frac{A_2}{A_1}$. Que vaut le coefficient de réflexion $R$ ? En déduire que la particule quantique est forcément réfléchie par la barrière de potentiel comme en mécanique classique et qu'avant d'être réfléchie, elle pénètre dans la zone (2), sur une profondeur de l'ordre de $\delta = \frac{1}{\beta}$.

**3.4.** Que vaut $r$ dans la limite $E \to 0$ et $E \to V_0^-$ ; dessiner l'allure de la fonction d'onde $\varphi(x)$ dans les deux cas.

4. Expliquer pourquoi il est nécessaire que l'énergie $E$ des particules quantiques soit supérieure à la hauteur de la marche de potentiel $V_0$ si l'on veut modifier la composition isotopique du mélange.

# Annexe

## Opérateurs d'analyse vectorielle

- **En coordonnées sphériques :**
  - Gradient : $\overrightarrow{grad}f = \frac{\partial f}{\partial r}\overrightarrow{e_r} + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta}\overrightarrow{e_\theta} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial f}{\partial \varphi}\overrightarrow{e_\varphi}$ ;
  - Divergence : $div(\overrightarrow{A}) = \frac{1}{r^2}\frac{\partial(r^2 A_r)}{\partial r} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial(\sin\theta A_\theta)}{\partial \theta} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi}$ ;
  - Rotationnel : $\overrightarrow{rot}\overrightarrow{A} = \frac{1}{r\sin\theta}\left(\frac{\partial(\sin\theta A_\varphi)}{\partial \theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial \varphi}\right)\overrightarrow{e_r} + \frac{1}{r}\left(\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial A_r}{\partial \varphi} - \frac{\partial(rA_\varphi)}{\partial r}\right)\overrightarrow{e_\theta} + \frac{1}{r}\left(\frac{\partial(rA_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial \theta}\right)\overrightarrow{e_\varphi}$.
  - Laplacien : $\Delta f = \frac{1}{r}\frac{\partial^2(rf)}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta\frac{\partial f}{\partial \theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2}$.
- **En coordonnées cylindriques :**
  - Gradient : $\overrightarrow{grad}f = \frac{\partial f}{\partial r}\overrightarrow{e_r} + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta}\overrightarrow{e_\theta} + \frac{\partial f}{\partial z}\overrightarrow{e_z}$ ;
  - Divergence : $div(\overrightarrow{A}) = \frac{1}{r}\frac{\partial(rA_r)}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial A_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$ ;
  - Rotationnel : $\overrightarrow{rot}\overrightarrow{A} = \left(\frac{1}{r}\frac{\partial A_z}{\partial \theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial z}\right)\overrightarrow{e_r} + \left(\frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r}\right)\overrightarrow{e_\theta} + \frac{1}{r}\left(\frac{\partial(rA_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial \theta}\right)\overrightarrow{e_z}$ ;
  - Laplacien : $\Delta f = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial f}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$.

## Identités mathématiques :

- $\cos(a) + \cos(b) = 2\cos\left(\frac{a+b}{2}\right)\cos\left(\frac{a-b}{2}\right)$. $\cos(a) - \cos(b) = 2\sin\left(\frac{a+b}{2}\right)\sin\left(\frac{a-b}{2}\right)$.
- $div\left(\overrightarrow{grad}(f)\right) = \Delta f$. $div\left(\overrightarrow{rot}(\overrightarrow{A})\right) = 0$.
- $div(f\overrightarrow{A}) = f div(\overrightarrow{A}) + \overrightarrow{grad}(f).\overrightarrow{A}$. $\overrightarrow{rot}(f\overrightarrow{A}) = f\overrightarrow{rot}(\overrightarrow{A}) + \overrightarrow{grad}(f) \wedge \overrightarrow{A}$
- $div(\overrightarrow{A} \wedge \overrightarrow{B}) = \overrightarrow{B}.\overrightarrow{rot}(\overrightarrow{A}) - \overrightarrow{A}.\overrightarrow{rot}(\overrightarrow{B})$. $\overrightarrow{rot}\left(\overrightarrow{grad}(f)\right) = \overrightarrow{0}$.
- $\overrightarrow{rot}\left(\overrightarrow{rot}(\overrightarrow{A})\right) = \overrightarrow{grad}\left(div(\overrightarrow{A})\right) - \Delta\overrightarrow{A}$.
- $\overrightarrow{rot}\left(\overrightarrow{A} \wedge \overrightarrow{B}\right) = \left(div(\overrightarrow{B})\right)\overrightarrow{A} - \left(div\overrightarrow{A}\right)\overrightarrow{B} + \left(\overrightarrow{B}.\overrightarrow{grad}\right)\overrightarrow{A} - \left(\overrightarrow{A}.\overrightarrow{grad}\right)\overrightarrow{B}$.

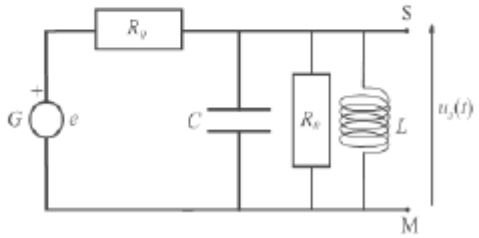
**NB :**

- *L'épreuve est composée de trois grandes parties totalement indépendantes.*
- *On attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. En particulier, il convient d'indiquer clairement les références des questions abordées.*
- *Les applications numériques doivent êtres données avec un nombre de chiffres significatifs raisonnable sans oublier les unités d'expression.*
- *Les formules d'analyse vectorielle délivrées en annexe ne seront pas nécessairement toutes utilisées.*

# 1ière partie : Electrocinétique

## Circuit RLC parallèle

*On considère le circuit représenté figure si- contre formé d'un générateur idéal G de f.é.m. e, de conducteurs ohmiques de résistance $R_0$, d'un condensateur de capacité C = 2,53 µF et d'une bobine purement inductive d'inductance L = 10 mH. Les points S et M constituent la sortie du dispositif ; elle peut être ouverte (rien n'est branché) ou fermée sur un dipôle. La tension de sortie est $u_s$ (t).*




1. G est un générateur idéal de tension sinusoïdale $e(t) = E_m \cos(\omega t)$ avec $E_m$ = 5 V. La sortie est ouverte ; le régime sinusoïdal forcé est établi : $u_s(t) = U_{Sm} \cos(\omega t + \varphi)$.

1.1.Déterminer l'admittance complexe $\underline{Y}_1(j\omega)$ équivalente aux trois éléments (*C, $R_0$ et L*) montés en parallèle entre les nœud S et M.

1.2. Calculer la fonction de transfert $\underline{H}(j\omega) = \dfrac{\underline{u}_s(t)}{\underline{e}(t)}$. En déduire $U_{Sm}$ et $\varphi$ .

1.3. Quel est l'ordre du filtre ? Quelle équation différentielle lie en régime variable quelconque l'entrée $e(t)$ à $u_s(t)$ ?

2. Entre les points S et M, tout le circuit équivaut à un générateur de Norton, de courant électromoteur $\eta(t) = \eta_m \cos(\omega t + \psi)$ et d'admittance $\underline{Y}_n = \alpha + j\beta$. Déterminer $\eta_m$ , $\psi$ , $\alpha$ et $\beta$ .

3. On remplace, dans le circuit initial (sortie ouverte), le générateur de tension sinusoïdale par un générateur idéal de tension continue de *f.é.m* $E = 5$ V en série avec un interrupteur *K*. On pose $LC\omega_0^2 = 1$, $Q = R_0\sqrt{\dfrac{C}{L}}$ et $\tau = \dfrac{Q}{\omega_0}$.

À la date $t < 0$, *K* est ouvert ; aucun courant ne circule dans le circuit. À *t = 0*, on ferme *K*.

3.1. Établir l'équation différentielle liant $u_s$, ses dérivées par rapport au temps, *E*, $\tau$ et $\omega_0$ .

3.2. On choisit $R_0$ pour que $Q = 1$. Calculer les valeurs de $\omega_0$ et $\tau$ .

3.3. Donner l'équation horaire $u_s$ (t) faisant intervenir les constantes *E* et $\tau$ .

3.4. Déterminer l'équation horaire *i*(t) du courant débité par le générateur.

3.5. Calculer l'énergie $W_e$ transférée par le générateur au circuit entre 0 et $10\tau$ .

1

## 2ième partie: Mécanique

### Déviation des projectiles

*Dans le référentiel géocentrique $\Re_0(O,\vec{x}_0,\vec{y}_0,\vec{z}_0)$, $Oz_0$ étant l'axe de rotation de la Terre, on considère un lieu de latitude $\lambda$ et le référentiel terrestre $\Re_T(A,\vec{x}_1,\vec{y}_1,\vec{z}_1)$ où $Az_1$ est la verticale ascendante (Figure 1).*

*En A, un canon tire dans le plan $(A,\vec{x}_1,\vec{z}_1)$ un obus, assimilable à un point matériel M de masse m, dont la vitesse initiale $\vec{v}_0$ fait avec le plan horizontal un angle $\alpha$ (Figure 2).*

*On néglige la résistance de l'air ainsi que la variation de l'accélération de la pesanteur $\vec{g}=-g\vec{z}_1$ avec l'altitude. On pose : $\overrightarrow{OM}=x\vec{x}_1+y\vec{y}_1+z\vec{z}_1$.*

*On considère tout d'abord le référentiel terrestre comme galiléen.*

1.1 Dans le repère $\Re_T$, déterminer l'équation de la trajectoire de l'obus.

1.2 Exprimer la portée P et l'altitude maximale $z_{max}$ atteinte en fonction de $v_0$, $\alpha$ et g.

1.3 Application numérique : Calculer P et $z_{max}$ pour $\alpha=30°$, $v_0=800\,m.s^{-1}$ et $g=9,8\,m.s^{-2}$.

On tient compte maintenant de la force d'inertie de Coriolis.

1.4 Exprimer le vecteur rotation $\vec{\Omega}=\omega\vec{z}_0$ de la Terre dans le repère $\Re_T$.

1.5 En déduire l'expression de la force d'inertie de Coriolis $\vec{F}_C$ dans le mouvement de $\Re_T$ par rapport à $\Re_0$ en fonction de m, $\omega$, $\lambda$, et des composantes $\dot{x}$, $\dot{y}$ et $\dot{z}$ de la vitesse du point M dans $\Re_T$.

On néglige la force d'inertie d'entraînement devant la force d'inertie de Coriolis .

1.6 En appliquant le principe fondamental de la dynamique à l'obus dans $\Re_T$, déterminer les équations différentielles du mouvement.

1.7 Intégrer les équations différentielles afin d'obtenir $\dot{y}$ et $\dot{z}$ en fonction de x, t, g, $\omega$, $\lambda$, $v_0$ et $\alpha$.

1.8 En déduire l'équation différentielle régissant le mouvement de l'obus suivant l'axe $\vec{x}$.

La vitesse de rotation de la Terre étant assez faible, on néglige le terme $4\omega^2 x$ devant $\ddot{x}$.

1.9 En déduire l'équation donnant $x$ en fonction du temps t.

1.10 En déduire les équations donnant y et z en fonction du temps t.

1.11 En négligeant les termes en $\omega^2$ devant les autres, déterminer le temps $t_2$ de retombée de l'obus.

Le point A possède une latitude $\lambda=45°$ .

1.12 *Application numérique* : Calculer le temps $t_2$ et la portée $P_x$ suivant l'axe $\vec{x}$ de l'obus. Conclure quant à une éventuelle déviation vers l'est de l'obus.

1.13 *Application numérique* : Calculer la portée $P_z$ suivant l'axe $\vec{z}$ de l'obus. Cette déviation est-elle vers le sud ou vers le nord ? Justifier.

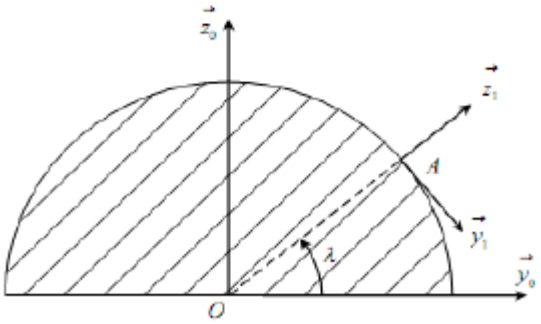



Figure 1

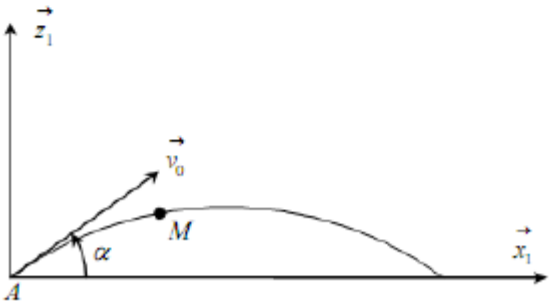



Figure 2

## 3ième partie: Electromagnétisme

### I. Préliminaire

1. Ecrire les équations locales vérifiées par le champ électrostatique $\vec{E}$ créé par une distribution de charges de densité volumique $\rho$ et celles vérifiées par le champ magnétostatique $\vec{B}$ créé par une distribution de courant de densité volumique $\vec{j}$, en un point M de l'espace. Justifier l'existence des potentiels scalaire et vecteur $\vec{A}$ et $V$. retrouver les équations locales, de Poisson, vérifiées par ces derniers.

2. Montrer que le champ électrostatique, dans une région vide de charges où les lignes de champ sont parallèles, est uniforme. En est-il de même pour le champ magnétostatique ?

3.a – Calculer pour les champ $\vec{r}(M) = \overrightarrow{OM}$ et $\vec{X} = X_x\vec{e}_x + X_y\vec{e}_y + X_z\vec{e}_z$, $\vec{\nabla}\bullet\vec{r}$ et $\left(\vec{X}\bullet\vec{\nabla}\right)\vec{r}$.

3.b – Montrer que pour un champ magnétostatique uniforme $\vec{B}$, le champ $\vec{A} = \frac{1}{2}\vec{B}\times\vec{r}$ est un potentiel vecteur. Calculer sa divergence.

4. Rappeler les expressions des discontinuités des champs électrostatique et magnétostatique au passage d'un milieu (1) dans un milieu (2). En déduire l'expression du champ électrostatique au voisinage d'un conducteur en équilibre électrostatique. Préciser, sur un schéma, le vecteur unitaire normale à l'interface intervenant dans les relations précédentes.

### II. Condensateur plan idéal

1. On considère le condensateur plan idéal constitué de deux armatures A et B , conductrices , identiques , d'axe Oz ,de rayon R ,distantes de $e \ll R$, de charges Q et – Q réparties uniformément sur les faces internes des armatures; pour le quel on négligera tout effet de bord.

1.a – Déterminer la structure du champ électrostatique entre les armatures.

1.b – Calculer en fonction de Q , R , $e$ et $\varepsilon_0$ la d.d.p $V_A$-$V_B$ entre les deux armatures.

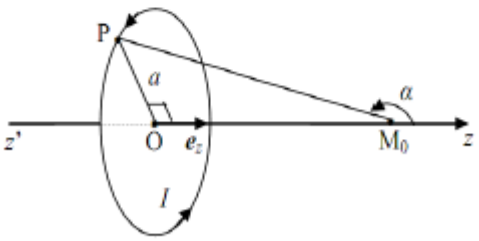
1.c – En déduire l'expression de la capacité C de ce condensateur. Préciser l'unité et la dimension physique de $\varepsilon_0$.

2.a – Détermine la densité volumique de l'énergie électrostatique $u_e = \varepsilon_0\frac{\vec{E}^2}{2}$ en tout point de l'espace.

2.b – En déduire, en fonction de Q , R, $e$ et $\varepsilon_0$ , l'expression de l'énergie potentielle électrostatique emmagasinée entre les armatures du condensateur. L'exprimer en fonction de Q et C.

### III. Solénoïde infini

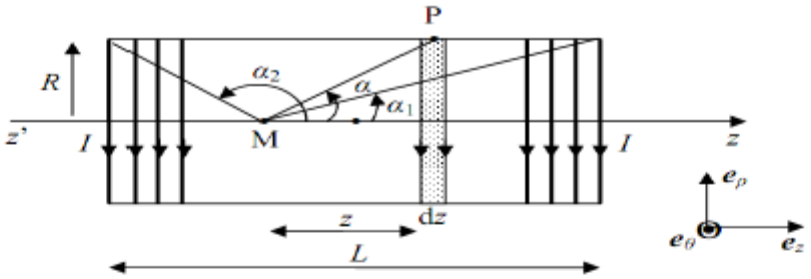
1. Une spire plane circulaire de centre O, d'axe z'Oz, de rayon a est parcourue par un courant stationnaire d'intensité I. Calculer, à l'aide de la loi de Biot-Savart, le champ magnétique au un point $M_0$ de son axe. Le mettre sous la forme $\vec{B}(M_0) = \vec{B}(O)f(\alpha)$ : où $\vec{B}(O)$ représente le champ magnétique au centre de la spire et $f(\alpha)$ une fonction trigonométrique de l'angle α.




Représenter sur une figure quelques lignes de champ et indiquer les faces nord et sud de la spire.

2.a – Un solénoïde de longueur finie L, d'axe z'z est constitué de spires coaxiales jointives, de

rayon R et parcourues dans le même sens par un courant stationnaire d'intensité I. L'origine des coordonnées cylindriques est prise au milieu du solénoïde, et l'on désigne par $n$ le nombre de spires par unité de longueur (voir figure ).




2.b – Exprimer le champ magnétique $d\vec{B}(M)$ créé par l'élément de solénoïde d'épaisseur dz.

2.c – En déduire le champ magnétique $\vec{B}(M)$ pour tout point M de l'axe du solénoïde, sachant que les spires des extrémités du solénoïde sont vues du point M sous les angles $2\alpha_1$ et $2(\pi - \alpha_2)$.

3. Un solénoïde dont la longueur L est très grande devant le rayon R des spires est qualifié de « solénoïde infini ».

3.1.a – Déterminer la structure du champ magnétostatique de cette distribution de courant.

3.1.b – Caractériser la densité surfacique de courant équivalente à cette distribution.

3.1.c – En déduire le champ magnétostatique $\vec{B}$ résultant en tout point de l'espace.

3.2.a – calculer le flux du champ $\vec{B}$ à travers les spires du solénoïde lui-même. En déduire l'expression de son inductance $l$. Préciser l'unité et la dimension physique de $\mu_0$.

3.2.b – Exprimer en fonction de $l$ et $i$ puis en fonction de B, $\mu_0$ ,R et L l'énergie magnétique emmagasinée dans le solénoïde. En déduire une expression de la densité volumique de l'énergie magnétique.

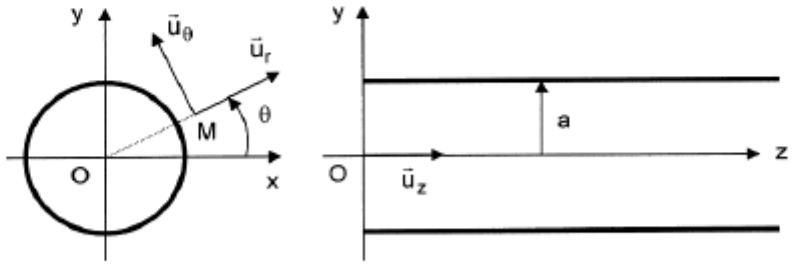
3.3. Calculer le potentiel vecteur en un point intérieur au solénoïde.

3.4. AN : L'enroulement est réalisé par un fil de cuivre de 3 mm diamètre et est parcouru par un courant de 5 A. Calculer B.

## IV. Ligne bifilaire

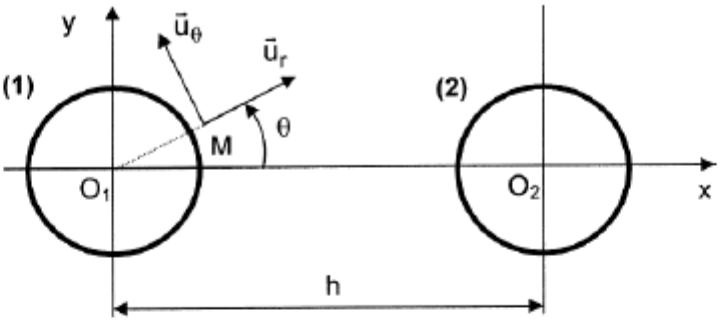
### A. Etude de l'équilibre électrostatique

*Soit un fil conducteur de longueur infinie, de rayon a et possédant la charge linéique $\lambda$.*




1. Que vaut la densité volumique de charges ρ dans le fil ? Justifier.
2. Montrer que le champ électrostatique est radial et qu'il ne dépend que de r, tel que : $\vec{E} = E(r)\vec{u}_r$ .
3. En appliquant le théorème de Gauss sur une surface à préciser, établir l'expression de $E$(r) en fonction de $\lambda, \varepsilon_0$ r et de constantes à déterminer en distinguant deux domaines (à définir). Quelle relation existe-t-il entre $\vec{E} = E(r)\,\vec{u}_r$ et le potentiel électrostatique $V$(r) ? Vérifier la condition de passage.
4. Le fil conducteur est porté au potentiel $V_1$. Exprimer la différence de potentiel $V(r) - V_1$, en fonction de $\lambda, \varepsilon_0$, a et r .

*Considérons deux fils (1) et (2) de longueur infinie, infiniment conducteurs, de rayon* a, *parallèles entre eux, espacés de* $h \gg a$ *et possédant les charges linéiques* $\lambda$ *et* $-\lambda$ *constantes et uniformes (figure 2). Nous ferons l'hypothèse que les charges restent uniformément réparties à la périphérie des conducteurs cylindriques. Ces deux conducteurs forment une ligne bifilaire.*




5. En appliquant le théorème de superposition, exprimer $V_1 - V_2$, la différence de potentiel entre le fil (1) et le fil (2).

6. Réaliser un tracé qualitatif des lignes de champ et des surfaces équipotentielles relatives aux conducteurs cylindriques.

7. Montrer qu'une surface équipotentielle particulière est un plan et donner son équation.

8. Déterminer l'expression du champ électrique $\vec{E}$ en tout point de ce plan. Tracer le module de $\vec{E}$ en fonction d'une variable à préciser.

9. Montrer que certaines lignes de champ sont portées par une droite. Exprimer le champ électrique $\vec{E}$ en tout point de cette droite. Tracer le module de $\vec{E}$ en fonction d'une variable à préciser.

10. Montrer que l'ensemble des deux conducteurs forme un condensateur de capacité linéique $C_0 = \dfrac{\pi\varepsilon_0}{Ln\left(\dfrac{h-a}{a}\right)}$.

**B. Etude en régime stationnaire**

*La ligne bifilaire est utilisée pour alimenter une charge. Le conducteur (1) constitue le conducteur aller du courant électrique constant d'intensité* $I_0$ *(dans le sens de l'axe Oz). Le conducteur (2) est le conducteur retour de ce courant. La répartition du courant est uniforme sur chaque conducteur. Les vecteurs densité de courant sont respectivement :* $\vec{j}_1 = \dfrac{I_0}{\pi a^2}\vec{u}_z$ et $\vec{j}_2 = -\dfrac{I_0}{\pi a^2}\vec{u}_z$.

1. Montrer que le champ magnétique créé par le conducteur (1) est orthoradial et qu'il ne dépend que de r, tel que : $\vec{B} = B_1(r)\vec{u}_\theta$.

2. En utilisant les lois locales, établir l'expression de $B_1(r)$ en distinguant deux domaines (à définir). Tracer le graphe de $B_1(r)$. Retrouver ces résultats à partir du théorème d'Ampère.

3. De même, exprimer $\vec{B}$, le champ magnétique résultant crée par les conducteurs (1) et (2), mais uniquement dans le plan défini par les axes des deux conducteurs et entre les conducteurs.

## V. Energie d'ionisation d'un atome

On considère un point fixe O et un point variable M défini par $OM = r$. Une distribution de charges électriques crée au point M un potentiel : $V(r) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r} e^{-\frac{r}{a}}$ ( potentiel de Yukawa )

1. Déterminer le champ $\vec{E}(r)$. Comment varie ce champ au voisinage immédiat de O ? Calculer le module du champ pour $r = a = 10^{-10} m$ ; $q = 1,6 10^{-19} C$.
2. Calculer le flux $\Psi$ du champ $\vec{E}$ à travers la surface d'une sphère de rayon R et de centre O. Que devient ce flux si $R \to 0$ et si $R \to \infty$ ? . Interpréter.
3. On peut considérer que ce potentiel est créé par une charge ponctuelle en O et une charge diffuse Q répartie dans tout l'espace et de densité $\rho(r)$.

3.1. Quelle est la valeur de Q ?

3.2. Calculer, par application de l'équation de Poisson, la densité volumique de charge $\rho(r)$.

4. Calculer le potentiel créé en O par cette distribution de charges. En déduire l'énergie nécessaire pour séparer, de manière quasi-statique, la charge ponctuelle en O de la charge diffuse qui l'entoure.
5. Le système précédent représente un modèle d'atome. Quelle est l'énergie d'ionisation de cet atome ?

# Annexe

### Opérateurs d'analyse différentielle

- En coordonnées sphériques

Gradient : $\vec{\nabla} f = \frac{\partial f}{\partial r}\vec{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta}\vec{e}_\theta + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial f}{\partial \varphi}\vec{e}_\varphi$ ;

Divergence : $\vec{\nabla}\cdot\vec{A} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial(r^2 A_r)}{\partial r} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial(\sin\theta A_\theta)}{\partial\theta} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial A_\varphi}{\partial\varphi}$;

Rotationnel : $\vec{\nabla}\times\vec{A} = \frac{1}{r\sin\theta}\left(\frac{\partial(\sin\theta A_\varphi)}{\partial\theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial\varphi}\right)\vec{e}_r + \frac{1}{r}\left(\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial A_r}{\partial\varphi} - \frac{\partial(rA_\varphi)}{\partial r}\right)\vec{e}_\theta + \frac{1}{r}\left(\frac{\partial rA_\theta}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial\theta}\right)\vec{e}_\varphi$;

Laplacien : $\vec{\nabla}^2 f = \Delta f = \frac{1}{r}\frac{\partial^2(rf)}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial f}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 f}{\partial\varphi^2}$.

- En coordonnées cylindriques :

$\vec{\nabla}\cdot\vec{A} = \frac{1}{r}\frac{\partial(rA_r)}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial(A_\theta)}{\partial\theta} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$ ; $\vec{\nabla}\times\vec{A} = \left(\frac{1}{r}\frac{\partial A_z}{\partial\theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial z}\right)\vec{e}_r + \left(\frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r}\right)\vec{e}_\theta + \frac{1}{r}\left(\frac{\partial rA_\theta}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial\theta}\right)\vec{e}_z$

### Identités remarquables :

1) $div(\overrightarrow{grad} f) = \vec{\nabla}\cdot(\vec{\nabla} f) = \vec{\nabla}^2 f = \Delta f$ ; 2) $\overrightarrow{rot}(\overrightarrow{grad} f) = \vec{\nabla}\times(\vec{\nabla} f) = \vec{0}$

3) $div(\overrightarrow{rot}\vec{A}) = \vec{\nabla}\cdot(\vec{\nabla}\times\vec{A}) = 0$ ; 4) $\vec{\nabla}\times(\vec{\nabla}\times\vec{A}) = \vec{\nabla}(\vec{\nabla}\cdot\vec{A}) - \vec{\nabla}^2\vec{A}$

5) $\vec{\nabla}\cdot(f\vec{A}) = f\vec{\nabla}\cdot\vec{A} + \vec{A}\cdot\vec{\nabla} f$ ; 6) $\vec{\nabla}\times(f\vec{A}) = f\vec{\nabla}\times\vec{A} + \vec{\nabla} f\times\vec{A}$

7) $\vec{\nabla}\cdot(\vec{A}\times\vec{B}) = \vec{B}\cdot\vec{\nabla}\times\vec{A} - \vec{A}\cdot\vec{\nabla}\times\vec{B}$ ; 8) $\vec{\nabla}\times(\vec{A}\times\vec{B}) = (\vec{\nabla}\cdot\vec{B})\vec{A} - (\vec{\nabla}\cdot\vec{A})\vec{B} + (\vec{B}\cdot\vec{\nabla})\vec{A} - (\vec{A}\cdot\vec{\nabla})\vec{B}$

***Remarques :***

- *L'épreuve est composée de quatre problèmes totalement indépendants.*
- *On attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. En particulier, il convient d'indiquer clairement les références des questions abordées.*
- *Les applications numériques doivent être données avec un nombre de chiffres significatifs raisonnable sans oublier les unités d'expression.*
- *La calculatrice est autorisée*

## 1ier problème: Moteur à deux temps

Un scooter de cylindrée inférieure à 50 cm³ a souvent un moteur à explosion à deux temps. Un gaz (mélange air-essence) subit un cycle à quatre étapes après admission dans un piston :

1. Étape F → B : compression adiabatique réversible par le piston, de l'état ($P_F$ , $V_F$) à ($P_B$ , $V_C$).

2. Étape B → C : combustion isochore jusqu'à la pression $P_C$.

3. Étape C → D : détente adiabatique réversible, de l'état ($P_C$ , $V_C$) à ($P_D$ , $V_D$).

4. Étape D → F : refroidissement isochore jusqu'à la pression $P_F$. Le mélange gazeux sera assimilé à un gaz parfait avec $\gamma = 1,4$ et de masse molaire $M = 29\ g.mol^{-1}$. Sa combustion libère une énergie $q = 30\ kJ.cm^{-3}$.

Le rapport $a = V_D/V_C$ s'appelle le taux de compression du moteur.

$V_D - V_C$ est la cylindrée du moteur. *C'est à cela que correspond le chiffre de 50 cm³.*

***Données*** **: $P_F = 10^5$ Pa ; $T_F = 300$ K; $P_B = 6\ 10^5$ Pa.**

1— Préliminaire

a) rappeler la loi de Mayer pour un gaz parfait. En déduire les expressions de ses capacités calorifiques à volume constant et à pression constante en fonction de R et $\gamma$.

b) retrouver, en précisant les conditions de validité, la relation de Laplace: $PV^{\gamma} = cst$.

c) comparer les pentes des courbes isotherme et isentropique dans le diagramme de Calpeyron.

2— Tracer le cycle en diagramme de Clapeyron puis en diagramme (T,S) en indiquant son sens de parcours.

1

3— Calculer le taux de compression du moteur. Application numérique.

4— Calculer les transferts thermiques sur chaque étape du cycle en fonction de R, $\gamma$, $P_F$, $V_D$ et des températures $T_F$, $T_B$, $T_C$, $T_D$. Déduisez-en le travail total reçu par le gaz.

5— Définissez le rendement $\eta$ du cycle et calculez-le en fonction de $a$ et $\gamma$.

6— Le scooter roule à 45 $km.h^{-1}$ à un régime de 7000 $tr.\min^{-1}$ et son moteur fournit une puissance

$\mathcal{P} = 4{,}4\ kW$.

a) Calculez la durée d'un cycle.

b) Calculer Q, transfert thermique libéré par la combustion à chaque cycle.

c) Calculer la consommation d'essence aux 100 km. Commenter.

## 2ième problème: Le moteur plasma micro-ondes

### A. — Principe de fonctionnement

Pour diminuer la consommation de gaz propulsif, il est nécessaire d'accélérer fortement le gaz éjecté par apport extérieur d'énergie. Cette accélération est rendue possible par l'ionisation de ce gaz (on obtient alors un plasma), les particules chargées pouvant être accélérées par un champ électrique.
Le gaz propulsif utilisé est par exemple du Xénon, il est ionisé par trois types de mécanismes potentiels, on suppose que tous les ions produits sont $X_e^+$. Ces trois mécanismes sont représentés sur la figure 1. La première source potentielle d'ion est la collision entre un atome et un électron produit par un canon à électrons. Il s'agit de la voie a. Outre l'ion produit cette voie produit deux électrons lents. L'application d'une onde électromagnétique micro-onde permet d'accélérer ces électrons afin qu'ils puissent également ioniser d'autres atomes de Xénon. Il s'agit de la voie b. Enfin, dans certaines conditions, les photons micro-onde sont également susceptibles de photo-ioniser les atomes de Xénon. Il s'agit de la voie c.
Une forte densité du plasma est assurée par la présence d'aimants permanents. Les ions $X_e^+$ sont finalement accélérés par une différence de potentiel dans une région appelée grille accélératrice.
Des canons à électrons assurent une neutralisation du gaz émis. L'ensemble est schématisé sur la figure 1 ci-dessous.

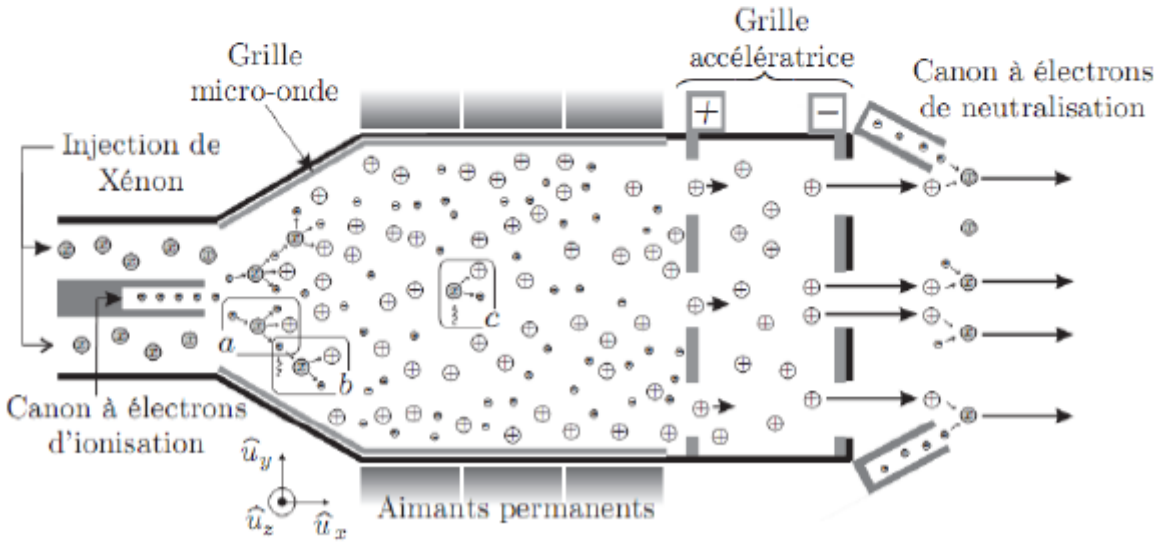



FIGURE 1 – Représentation schématique du moteur ionique : les symboles ⊗ sont des atomes de Xénon, ⊖ des ions $Xe^+$ et ∘ des électrons.

On considère le plasma comme un milieu électriquement neutre, de permittivité $\varepsilon_0$ et de perméabilité magnétique $\mu_0$ ,qui renferme n ions par unité de volume et autant d'électrons de masse $m_e$ et de charge $-e$.
Au sein du plasma, les ions possèdent une vitesse caractéristique bien plus faible que celle des électrons, ils peuvent ainsi être considérés comme immobiles. Les électrons sont dits libres pour les distinguer de ceux qui restent attachés aux ions.
Le plasma étudié ici est non-collisionnel, c'est-à-dire que l'on néglige l'effet des chocs entre ions et électrons ou entre particules de même espèce. On suppose également qu'il est non relativiste ce qui signifie que la vitesse caractéristique des électrons libres est faible devant celle de la lumière $\|v_e\| \ll c$. Afin d'assurer une ionisation la plus complète possible, on souhaite finalement que ce plasma soit le siège de la propagation d'un rayonnement micro-onde. L'onde électromagnétique correspondante est associée à un champ électrique dont la représentation complexe s'écrit : $\underline{\vec{E}} = E_0 e^{j(\omega t - kx)} \vec{e}_y$)

15 — On suppose la propagation effective. Faire l'inventaire de toutes les forces appliquées à un électron libre et préciser les quelles sont négligeables.

16 — Déterminer, en régime de propagation établi, la représentation complexe $\underline{\vec{v}}_e$ de la vitesse des électrons libres et en déduire la conductivité complexe $\underline{\sigma}$ du plasma définie par $\underline{\vec{j}} = \underline{\sigma}\underline{\vec{E}}$.

17 — Vérifier que dans ce régime de propagation la densité volumique de charge ρ est bien nulle puis en revenant à la notation réelle établir l'équation de propagation du champ $\vec{E}(x,t)$. On rappelle que: $\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{E}) = \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{E}) - \vec{\nabla}^2 \vec{E}$, en déduire l'équation de dispersion dans laquelle apparaît la pulsation plasma : $\omega_p = \sqrt{\dfrac{ne^2}{\varepsilon_0 m_e}}$.

18 — A quelle condition l'onde appliquée au plasma peut-elle s'y propager ? Si non que lui arrive-t-il ?
Un intense champ magnétique statique axial $\vec{B}_0 = B_0 \vec{e}_z$, supposé uniforme, est appliqué à l'intérieur du plasma par des aimants permanents.

19 —Ecrire l'équation vectorielle qui décrirait le mouvement de l'électron s'il n'était soumis qu'à ce champ magnétique. Montrer que pour une vitesse initiale de l'électron contenue dans le plan perpendiculaire au champ magnétique, son mouvement serait circulaire uniforme dans ce plan, et que sa période de rotation serait indépendante de sa vitesse. Exprimer la pulsation $\omega_c$ correspondante, appelée pulsation cyclotron, et calculer sa valeur numérique pour un champ magnétique appliqué d'intensité $B_0 = 0,20T$.

20 — Montrer qualitativement que l'application du champ micro-onde $(\vec{E}, \vec{B}_0)$ avec $\omega \approx \omega_c$ permet d'accélérer les électrons en augmentant la norme de leur vitesse.

21 — D'après ce qui précède, exprimer et calculer numériquement la densité particulaire maximale que l'on peut espérer pour un champ magnétique appliqué d'intensité $B_0 = 0,20T$.

Un champ magnétique permanent intense permet donc d'obtenir une densité importante de plasma et ainsi d'augmenter le courant ionique engendré par les grilles accélératrices. Il aide par ailleurs à maintenir l'ionisation : les lignes de champ magnétique « piègent» les électrons en les forçant à décrire des cercles plutôt que de diffuser librement vers les parois; la probabilité qu'un électron chaud ionise une molécule est accrue en raison de l'augmentation de la longueur de son trajet.

22 — L'énergie de première ionisation du Xénon est de l'ordre de 12,0 eV. La configuration précédente permet-elle d'envisager une réelle contribution de la photo-dissociation (voie c). On justifiera sa réponse par un calcul.

## B. — Poussée

On néglige la masse me des électrons devant celle des ions notée μ.

23 — Exprimer la relation entre l'intensité du courant électrique $I$ dû aux ions traversant le moteur, le débit $D_m$ de masse de gaz issu du vaisseau et des caractéristiques des ions.

24 — On suppose que les ions ont une vitesse caractéristique nulle à l'entrée de la grille

accélératrice. On note $V_a$ la tension présente entre les deux électrodes de la grille accélératrice. Déterminer la vitesse $v_s$ caractéristique de sortie des ions du moteur. En déduire l'intensité $F = D_m v_s$ de la force de poussée du moteur en fonction de $I$, $\mu$, $V_a$ et $e$.

25 — La densité volumique de courant dans le moteur est liée à la tension d'accélération par la loi de Child-Langmuir que nous admettrons : $j = \frac{4\varepsilon_0}{9}\sqrt{\frac{2e}{\mu}}\frac{V_a^{3/2}}{d^2}$.

la distance $d$ étant celle séparant les deux électrodes de la grille accélératrice. Exprimer $F$ en fonction de $V_a$, $d$, $\varepsilon_0$ et du diamètre $D$ du jet de gaz.

On considère un moteur ionique utilisant du Xénon, de masse molaire $M = 131 g.mol^{-1}$ et possédant les caractéristiques suivantes :

- tension accélératrice $V_a = 700V$;
- distance $d$ entre les deux électrodes de la grille accélératrice : $d = 2,50mm$;
- diamètre de chaque trou dans les électrodes de grille délimitant les jets élémentaires $D = 2,00mm$;
- nombre de trous en vis-à-vis dans chaque électrode : $N = 2,20.10^3$.

26 — Calculer les valeurs numériques de la poussée $F$ de ce moteur, de la vitesse de sortie des ions et de la masse de Xénon consommée sur une période de 90 jours de fonctionnement. Evaluer la puissance cinétique totale transmise au jet de gaz propulsé.

27 — Justifier sans calcul la nécessité de neutraliser le jet d'ions issu du moteur en lui fournissant des électrons.

## C. — Application au maintien d'un satellite en orbite basse

On considère un satellite terrestre de masse $m_s = 250kg$ en orbite circulaire basse à l'altitude $h = 300km$. Cette altitude est telle que les hautes couches de l'atmosphère le freinent.

28 — Exprimer l'énergie cinétique $E_C$ du satellite en fonction de son énergie mécanique $E_m$ ; en déduire que, paradoxalement, le freinage entraine une augmentation de la vitesse.

29 — Lorsque le moteur est éteint, les forces de frottement font perdre au satellite une altitude $\Delta h = 20m$ à chaque révolution. Exprimer la variation d'énergie mécanique correspondante, effectuer l'application numérique.

30 — Le moteur ionique étudié précédemment permet-il de maintenir l'altitude de ce satellite ?

# 3ième problème: Trous d'Young

## A. — Dispositif éclairé par une source ponctuelle monochromatique

Une source $S$, de dimensions suffisamment faibles pour pouvoir être considérée comme ponctuelle, éclaire un écran opaque percé de deux trous $S_1$ et $S_2$, également de faible dimension, distants l'un de l'autre de $a$. On note O' le milieu du segment $S_1S_2$, et O'z l'axe normal en O' au plan opaque. La source S se trouve au point O'' de l'axe O'z à une distance $d$ en amont du point O'. Le phénomène d'interférence est observé sur un écran ($E$) placé normalement à l'axe O'z à une distance $D$ en aval du point O'. L'espace est reporté au repère cartésien (O, $\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z$ ) défini de la façon suivante : O est le point de l'écran ($E$) appartenant à l'axe O'z ; $\vec{u}_z$ est le vecteur unitaire de l'axe O'z, orienté du point O' vers O ; $\vec{u}_x$ est le vecteur unitaire parallèle à $S_1S_2$, orienté de $S_1$ vers $S_2$ ; $\vec{u}_y$ est le vecteur unitaire tel que la base ($\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z$) soit orthonormée directe.

On utilisera les valeurs numériques suivantes : $a = 1,2$ mm ; $D = 2,0$ m ; $d = 40$ cm ; indice de l'air $n_{air} \square 1$.

1—Soit M($x$, y, 0) un point quelconque de l'écran ($E$).

a) Définir la différence de marche $\delta$ (M) entre les trajets des ondes parvenant en M et provenant de $S_1$ et $S_2$.

b) Établir les expressions des distances $S_1M$ et $S_2M$ en fonction de $x$, y, a et $D$.

c) Sachant que dans le dispositif des trous de Young, $|x|$, $|y|$ et $a$ sont faibles devant $D$, en déduire l'expression approchée de la différence de marche en fonction de $x$, $a$ et $D$.

2— La source S est une source monochromatique émettant une radiation de longueur d'onde $\lambda = 632,8nm$.

a) Définir le lieu des points de l'écran où l'intensité lumineuse est maximale.

b) Définir le lieu des points de l'écran où l'intensité lumineuse est minimale.

c) Décrire la figure d'interférences. Définir, exprimer et calculer son interfrange $i$. que vaut l'interfrange si le système plonge dans un milieu d'indice $n = 4/3$?

3— Les deux trous sont désormais éclairés par une source ponctuelle monochromatique qui n'est plus située sur l'axe O'z, mais en un point $(x_S, 0, -(d + D))$ tel que $|x_s|$ et $a$ sont faibles devant $d$.

a) Calculer dans ce cas la différence de marche $\delta(M)$.

b) Que devient alors la figure d'interférences ? Où est située la frange centrale ?

4— Les deux trous sont remplacés par deux sources ponctuelles différentes, deux lampes par exemple. Les deux sources sont identiques, et donc de même longueur d'onde. Que devient la figure d'interférences ?

5— Les deux trous sont toujours éclairés par une source ponctuelle, mais on place devant $S_1$ un polariseur orienté selon $\vec{u}_x$, et devant $S_2$ un polariseur analogue, orienté selon $\vec{u}_y$. Que devient la figure d'interférences dans ce cas ?

6— Les deux trous ont maintenant des surfaces différentes, respectivement notées $A_1$ et $A_2$. L'amplitude de l'onde lumineuse arrivant en M et émise par le trou $S_i$ est proportionnelle à la racine carrée de la surface de ce trou, et inversement proportionnelle à la distance $S_iM$.

Calculer l'intensité lumineuse $I$(M) observée en un point $M$ de l'écran ainsi que le contraste des franges dans les mêmes conditions qu'en (1.) . Comment est modifiée la figure d'interférences ?

## B. —Modification de la différence de marche par une lame de mica

On reprend la configuration de la question 1 (trous quasi-ponctuels éclairés par une source ponctuelle monochromatique placée en O'').

7— On place devant le trou $S_1$, une petite lame de mica à faces parallèles, transparente, d'indice $n = 1,5$ pour la longueur d'onde utilisée et d'épaisseur $e = 50$ µm. On suppose que la lumière traverse la lame en incidence normale.

a) calculer la nouvelle différence de marche $\delta'(M)$ entre les deux rayons qui interfèrent en $M$.

b) que devient la figure d'interférence ?

c) déterminer la position de la frange centrale. Application numérique.

d) que ce passe-t-il si la lame est placée devant $S_2$?

## C. —Trous d'Young éclairés par une source étendue

Le dispositif des trous d'Young de la question 1 est maintenant éclairé par une fente de largeur $b$ parallèle aux trous, de centre O'' $(0,0,-(d+D))$. On observe le phénomène dans l'écran $(E)$ placé à la distance $D$ du plan des trous. La lumière, monochromatique, a pour longueur d'onde $\lambda$. Une largeur $dx$ de la source émet l'intensité $dI = I_0 dx / b$. Les différents points de la source émettent de façon incohérente.

8— Exprimer l'éclairement en tout point de l'écran.

9— Quelle doit être la condition sur $b$ pour que les franges soient visibles?

*Données:* $d = 10$ cm, $b = 0{,}5$ cm, $a = 1$mm.

## 4ième problème: Effet d'un filtre actif sur une tension carrée

Soit le montage de la *figure 1* où les A.O sont parfaits, $R = 10k\Omega$ et $R_2 = 400\Omega$.

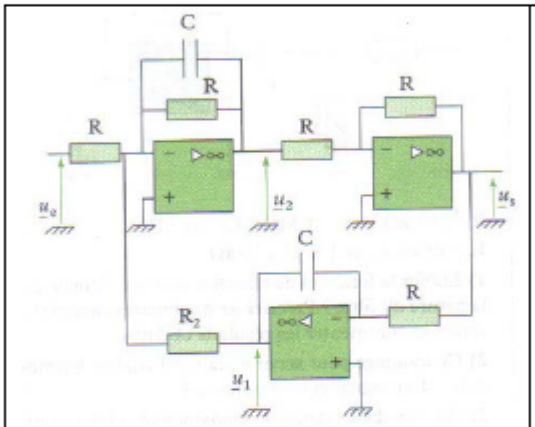



*figure1*

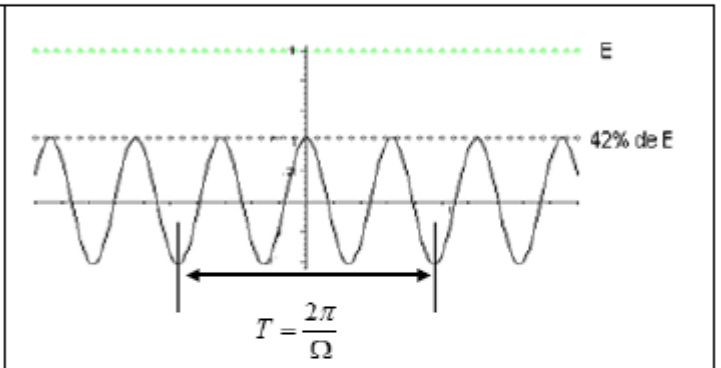



*figure2*

1— Déterminer la fonction de transfert du système et la mettre sous la forme : $\underline{H} = \dfrac{H_0}{1 + jQ\left(x - \dfrac{1}{x}\right)}$

À quel type de filtre correspond-elle ? Quel est son rôle ? Comment obtenir ce filtre à partir de composants passifs et d'un montage simple ? Quel est l'avantage du montage à A.O. ?

2— On considère à présent une tension carrée $u_e(t) = \dfrac{4E}{\pi}\left(\cos(\Omega t) - \dfrac{1}{3}\cos(3\Omega t) + \dfrac{1}{5}\cos(5\Omega t)\ldots\right)$, de période $T = \dfrac{2\pi}{\Omega}$, représentée par les trois premiers harmoniques non nuls de sa décomposition en série de Fourier.

Sur la figure 2, on a représenté, en concordance de temps, un harmonique de la tension de sortie $u_s(t)$.

a) Vérifier que le filtre est accordé sur l'harmonique d'ordre 3. En déduire la valeur à donner à C.

b) Tracer le spectre de $u_e(t)$ et $G = |H(j\omega)|$ sur un même graphique.

3— Déterminer les amplitudes et fréquences des harmoniques considérés en sortie du montage.

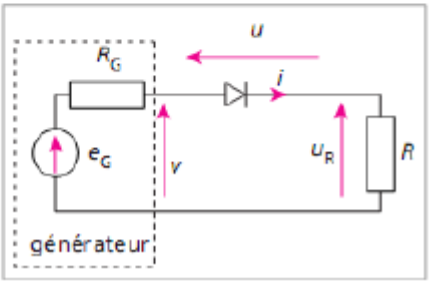
## 2018-2

***NB :***

- *Calculatrice autorisée*
- *L'épreuve est composée de quatre problèmes totalement indépendants.*
- *On attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. En particulier, il convient d'indiquer clairement les références des questions abordées.*
- *Les applications numériques doivent être données avec un nombre de chiffres significatifs raisonnable sans oublier les unités d'expression.*

# 1ier problème : Redressement des signaux

## I. redressement simple alternance




Dans le circuit ci-contre $R = 70\Omega$, la diode est supposée parfaite et le générateur, de résistance $R_G = 10\Omega$, délivre une *f.e.m.* $e_G(t)$ périodique, de fréquence 1 kHz, dont on peut choisir la forme et l'amplitude. Dans un premier temps, on choisit une *f.e.m.* sinusoïdale de valeur efficace $E = 50$ V.

1. Calculer la période T et la valeur maximale $E_{max}$ de la *f.e.m.* $e_G(t)$. Tracer l'allure de $i(t)$.

2. Tracer, en fonction du temps, l'allure des courbes $e_G(t)$, $u(t)$ et $v(t)$. Pourquoi cette dernière tension n'est-elle pas sinusoïdale ? Comment doit-on modifier la valeur de R pour que $v(t)$ soit sinusoïdale ?

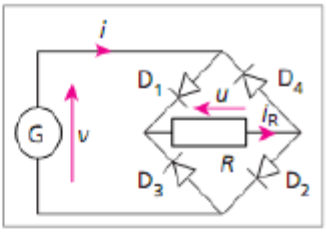
3. Déterminer l'expression du courant moyen $I_{moy}$ et de la puissance moyenne $P$ dissipée dans R, en fonction de $E$, $R_G$ et R. Calculer numériquement $I_{moy}$ et $P$. Exprimer et calculer l'intensité efficace, $I_{eff}$ le facteur de forme $F = \frac{I_{eff}}{I_{moy}}$ et le taux d'ondulation $\tau = \sqrt{F^2 - 1}$.

4. Le générateur délivre maintenant une tension en créneaux symétriques variant de $V_{max}$ à $-V_{max}$ avec $V_{max} = 40V$.

   a. Tracer les courbes représentant $u_R(t)$, $u(t)$ et $v(t)$.

   b. Calculer le taux d'ondulation et la puissance moyenne $P$ dissipée dans R.

## II. redressement double alternance




Dans le circuit ci-contre, les diodes sont supposées idéales. Le générateur $G$ fournit la tension sinusoïdale d'amplitude $E_G = 50$ V, de résistance interne nulle et de fréquence $f = 50$ Hz. De plus $R = 100\Omega$.

1. Montrer que, lorsque $v(t) > 0$, deux des diodes sont bloquées et deux des diodes sont passantes. Préciser lesquelles, ainsi que le sens des courants $i$ et $i_R$.

2. Mêmes questions lorsque $v(t) < 0$.

3. Tracer les courbes représentant $i$(t), l'intensité du courant traversant les diodes $i_d$(t), $i_R$(t) et $u$(t). Comment seraient modifiées ces courbes si les diodes étaient toutes identiques mais réelles (avec tension seuil $v_s$ et résistance dynamique $r_d$ faibles) ?

*Le cas des diodes idéales sera conservé par la suite.*

4. Pourquoi ne peut-on pas, sur un oscilloscope, visualiser simultanément $v$(t)et $u$(t)? Proposer une solution pour le faire.

5. Calculer $I_{R,moy}$ , $I_{R,eff}$, le facteur de forme et le taux d'ondulation. Les comparer au cas du redressement simple alternance.

## III. Lissage après redressement double alternance

Dans le montage précédent, on ajoute un condensateur de capacité C en parallèle sur la résistance R.

1. Comment est modifiée l'allure de la courbe $u$(t) ? On distinguera deux régions : celle où $u$(t)croît, soit entre $t$=0 et $t_1$,et celle où $u$(t) décroît, soit entre $t_1$ et $t_2$.

2. Entre $t$=0 et $t_1$ , donner l'expression de $u$(t) en fonction de R, C, $t$ , $t_1$ et $E_{max}$.

3. Comment doit-on choisir C pour obtenir un bon lissage ? Entre $t_1$et $t_2$, quelle est approximativement la durée du phénomène observé en fonction de la période T du générateur ?

4. En déduire l'amplitude d'oscillation $\Delta U = \dfrac{u(t_2) - u(t_1)}{2}$ de $u$(t) puis son taux d'ondulation :

$$\tau = \frac{\Delta U}{U_{moy}} \square \frac{\Delta U}{E_{max}}.$$

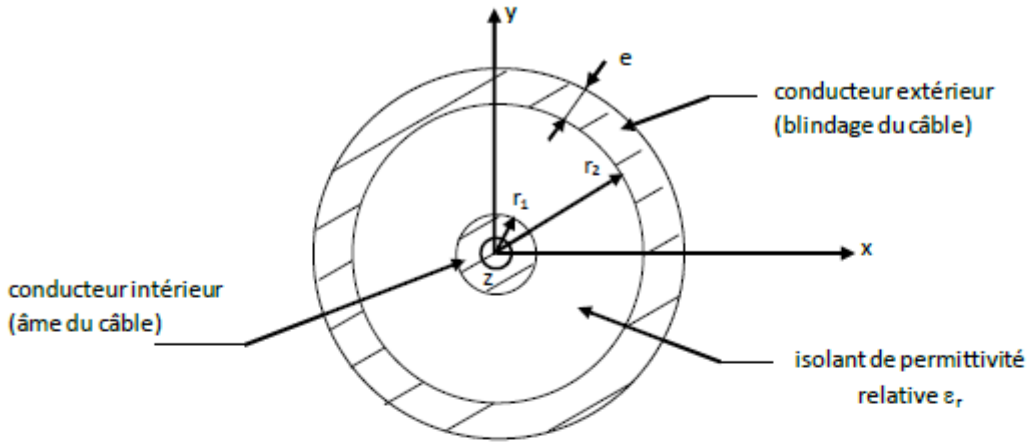
5. Proposez une valeur de C correcte. Peut-on choisir un condensateur électrochimique ?

6. Proposez une méthode de mesure de ce taux d'ondulation à l'aide d'un oscilloscope seulement et en utilisant ses touches AC et DC.

## 2ième problème : Etude statique d'une ligne coaxiale

Un câble coaxial est constitué par deux cylindres coaxiaux parfaitement conducteurs, de même axe Oz, et de rayons respectifs $r_1$, $r_2$ et ($r_2$+e), et de longueur $\ell$. La longueur de la ligne $\ell$ est assez grande devant $r_1$ et $r_2$ pour que l'on puisse négliger les effets d'extrémités : on considère que les symétries et invariances sont les mêmes que si la longueur $\ell$ était infinie.

L'espace entre les deux conducteurs contient un isolant, homogène et isotrope de permittivité relative $\varepsilon_r = 2{,}0$. On rappelle que la permittivité absolue $\varepsilon$ de l'isolant est liée à sa permittivité relative par la relation $\varepsilon = \varepsilon_0.\varepsilon_r$, la notation $\varepsilon_0$ désignant la permittivité absolue du vide.




Pour les applications numériques, on prendra : $r_1 = 0{,}15$ cm, $r_2 = 0{,}50$ cm, $\ell = 10$ m, $e = 0{,}10$ cm, $\mu_0 = 4\pi.10^{-7}$ H.m$^{-1}$, $\varepsilon_0 = 8{,}85.10^{-12}$ F.m$^{-1}$.

**1.** Le conducteur **intérieur** est porté au potentiel $V_1$ constant et le conducteur **extérieur au potentiel $V_2$, qu'on suppose nul**. Les conducteurs, en équilibre électrostatique, portent alors respectivement les charges électriques $+Q$ et $-Q$, supposées uniformément réparties sur les deux seules surfaces des conducteurs qui sont de rayon $r_1$ et $r_2$.

1.1. Montrer que le champ électrique est radial et que sa valeur algébrique ne dépend que de r, soit : $\vec{E} = E(r)\,\vec{u}_r$.

1.2.a. Etablir l'expression de $E(r)$ en fonction de Q, de la permittivité $\varepsilon = \varepsilon_0.\varepsilon_r$ de l'isolant, de r et de $\ell$, en distinguant les trois cas : $r < r_1$, $r_1 < r < r_2$ et $r_2 < r < (r_2+e)$. Il est rappelé que l'expression de E(r) demandée se déduit de celle obtenue dans le cas d'un câble coaxial « à vide » en remplaçant la permittivité absolue $\varepsilon_0$ du vide par celle, $\varepsilon$, du matériau isolant.

1.2.b. Montrer que, dans le domaine $r > (r_2+e)$, $E(r) = 0$.

1.3.a. Tracer le graphe de $E(r)$.

1.3.b. Commenter **physiquement** les éventuelles discontinuités de $E(r)$ à la traversée des cylindres de rayons $r_1$, $r_2$ et $(r_2+e)$.

1.4. Exprimer la tension $U_{12} = V_1 - V_2$ en fonction de Q, $\varepsilon = \varepsilon_0.\varepsilon_r$, $\ell$, $r_1$ et $r_2$.

1.5. Montrer que la capacité par unité de longueur du câble coaxial, notée $C_1$, est donnée par :

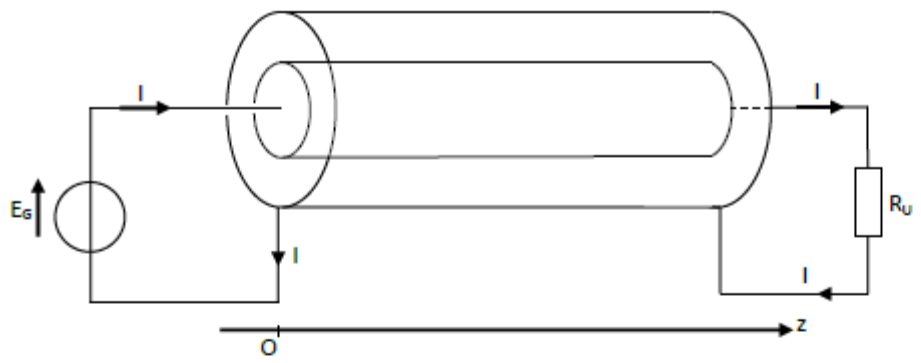
$$C_1 = \frac{2\pi\varepsilon}{\ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)}.$$

1.6. En déduire **simplement** l'expression de l'énergie électrostatique $W_e$ emmagasinée par le câble coaxial de longueur $\ell$.

1.7. Calculer la valeur numérique de $C_1$.

1.8. Calculer la valeur numérique de $W_e$ pour une tension $U_{12} = 10$ V entre les armatures du câble.

**2.** Le câble coaxial est chargé (à sa sortie) par une résistance $R_u$ et alimenté en entrée par un générateur de tension continue $E_G$.




Le conducteur intérieur constitue le conducteur aller du courant électrique d'intensité I. Le conducteur extérieur constitue le conducteur retour de ce courant. Les conducteurs sont parcourus dans toute leur épaisseur par des courants volumiques de densités uniformes $\vec{j}_1$ et $\vec{j}_2$, de même direction que Oz. On considère de nouveau que **les symétries et invariances sont les mêmes que si la longueur $\ell$ était infinie**.

2.1. Montrer que le champ magnétique est orthoradial et que sa valeur algébrique ne dépend que de r, soit : $\vec{B} = B(r)\,\vec{u}_\theta$.

2.2. Etablir les expressions de B(r), en fonction de $\mu_o$, I, $r_1$, $r_2$ et de e, en distinguant quatre domaines à définir.

2.3.a. Tracer l'allure du graphe de B(r).

2.3.b. Observe-ton des discontinuités de B(r) à la traversée des cylindres de rayons $r_1$, $r_2$ et $(r_2+e)$ ? Aurait-on pu le prévoir avant de traiter les questions 2.1 à 2.2 ? Pourquoi ?

2.4.a. Rappeler l'expression de la densité volumique d'énergie magnétique en un point de l'espace, en fonction du champ magnétique en ce point.
**Dans toute la** suite, on néglige, notamment pour alléger les calculs, la part de l'énergie magnétique emmagasinée dans l'âme - région $r<r_1$ - et celle localisée dans le blindage - région $r_2 < r < (r_2+e)$ - du câble coaxial.

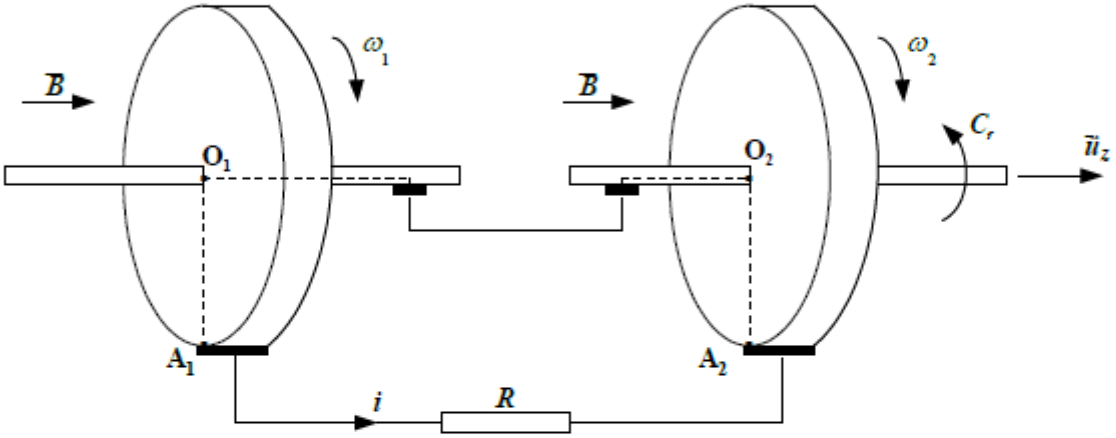
2.4.b. Exprimer, **dans ces conditions**, l'énergie magnétique $W_m$ emmagasinée par le câble coaxial de longueur $\ell$, en fonction de $\mu_o$, I, $r_1$, $r_2$ et de $\ell$.

2.5. En déduire l'expression de l'inductance propre du câble coaxial par unité de longueur notée $L_1$.
2.6. Calculer la valeur numérique de $L_1$.
2.7. Le câble coaxial est parcouru par un courant d'intensité I = 0,10 A.
Calculer la valeur numérique de l'énergie magnétique $W_m$ emmagasinée par le câble coaxial.
**3.** Les conducteurs intérieur et extérieur ont une conductivité $\gamma = 5{,}8.10^7\,S.m^{-1}$.
3.1. Exprimer la résistance des conducteurs par unité de longueur, notée $R_1$, en fonction de $\gamma$, $r_1$, $r_2$, et de $r_3 = (r_2+e)$.
3.2. Calculer la valeur numérique de $R_1$.

3.3. On souhaite régler la tension $E_G$ du générateur pour obtenir un courant d'intensité $I = 0{,}20$ A. La ligne est chargée par $R_u = 50\ \Omega$. Calculer la valeur numérique de $E_G$.

## 3ième problème : transmission entre deux arbres

Deux disques conducteurs identiques de rayon $a$, sont solidaires de deux arbres de rayons négligeables, non couplés l'un à l'autre et coaxiaux. Les deux disques se trouvent dans un champ magnétique, $\vec{B} = B\vec{u}_z$ uniforme, invariable dans le temps. Les arbres sont reliés électriquement par un fil conducteur, aussi bien que les périphéries des disques, formant ainsi un circuit fermé, de résistance $R$ (Figure si dessous). Le premier disque reçoit une puissance mécanique $P_m$ et tourne à la vitesse angulaire $\vec{\omega}_1 = \omega_1 \vec{u}_z$, tandis que sur l'arbre du deuxième disque, on applique un couple résistant de moment $\vec{C}_r = -C_r \vec{u}_z$ et il tourne en régime permanent à la vitesse angulaire $\vec{\omega}_2 = \omega_2 \vec{u}_z$. On note $J$, le moment d'inertie d'un disque par rapport à son




*1. Forces électromotrices.*

**1.1** En utilisant la circulation du terme $(\vec{v} \times \vec{B})$ le long du "rayon actif" $O_1A_1$ (en pointillés sur la figure) du premier disque, exprimer la force électromotrice $e_1$ induite sur ce rayon, en fonction de $\omega_1$, $a$ et $B$.
Préciser clairement la convention utilisée pour définir $e_1$.

**1.2.** Conduire la même démarche pour le calcul de l'expression de la force électromotrice $e_2$ induite le long du "rayon actif" $O_2A_2$ du deuxième disque, en fonction de $\omega_2$, $a$ et $B$, en précisant également la convention utilisée pour définir $e_2$.

**1.3.** Exprimer l'intensité induite $i$ parcourant la résistance $R$.

*2. Force et couple.*

**2.1.** En déduire la force de Laplace $\vec{F}_L$ exercée sur le rayon $O_2A_2$. Quel est son point d'application ? La représenter sur un schéma.

**2.2.** Exprimer le moment de $\vec{F}_L$, noté $\vec{C}_L$, par rapport au centre $O_2$ du deuxième disque.

**2.3.** Exprimer puis calculer la vitesse de rotation $\omega_2$ du deuxième disque, en régime permanent, en fonction de $\omega_1$, $C_r$, $a$ et $B$.

**2.4.** En déduire la valeur maximale $C_{r\,max}$ du couple résistant ; la calculer numériquement.

A.N. : $B = 1$ T ; $a = 10$ cm ; $\omega_1 = 104{,}6$ rad/s ; $R = 0{,}2\ \Omega$ ; $C_r = 10^{-2}$ N.m

**3.** A l'instant $t = 0$, on supprime le couple résistant sur le deuxième disque et on maintient la vitesse de rotation du premier disque constante : $\omega_1 = \omega_{10} =$ constante et $C_r = 0$.

**3.1.** Déterminer $\omega_2(t)$ en fonction du temps, si à $t = 0$, $\omega_2(0) = \omega_{20}$. On posera $\alpha = \left(\frac{a^2}{2}\right)^2 \frac{B^2}{RJ}$.

A.N. : $J = 2{,}5.10^{-2}$ kg.m² ; $\omega_{10} = 104{,}6$ rad/s ; $\omega_{20} = 24{,}6$ rad/s. Tracer la courbe $\omega_2(t)$.

**3.2.** Donner l'expression de la puissance des forces de Laplace sur le premier disque.
En déduire celle de la puissance mécanique instantanée $P_m(t)$ reçue par le premier disque, en fonction de $\alpha$, $J$, $\omega_{10}$, $\omega_{20}$ et $t$.

**3.3.** A partir de $P_m(t)$, exprimer l'énergie mécanique $W_m$ reçue par le système constitué des deux disques, pendant ce régime transitoire, et calculer sa valeur.

**4.** On suppose maintenant qu'à $t = 0$, on annule le couple résistant sur le deuxième disque et on ne fournit plus de puissance mécanique à l'arbre du premier disque.

**4.1.** Ecrire les équations différentielles couplées concernant les vitesses angulaires $\omega_1(t)$ et $\omega_2(t)$ des deux disques.

**4.2.** En déduire les fonctions $\omega_1(t)$, $\omega_2(t)$ et $i(t)$, d'abord littéralement puis numériquement si, à $t = 0$, on a :

$$\begin{cases} \omega_1(0) = \omega_{10} = 104{,}6 \text{ rad/s} \\ \omega_2(0) = \omega_{20} = 24{,}6 \text{ rad/s} \end{cases}$$

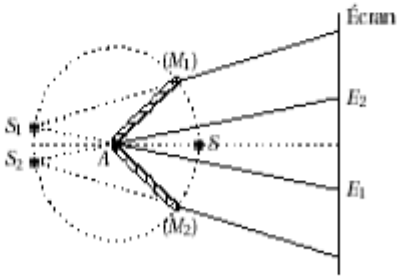
Représenter graphiquement l'allure de $\omega_1(t)$, $\omega_2(t)$ et $i(t)$.

**4.3.** Calculer l'énergie dissipée sous forme de chaleur dans la résistance $R$, pendant ce régime transitoire, de deux manières différentes.

## *4ième problème :* Etude d'un dispositif interférentiel

On considère le dispositif interférentiel suivant formé de deux miroirs plans $M_1$ et $M_2$ placés dans l'air et formant un dièdre d'arêtes $A$ et d'angle égal à $\frac{\pi}{2} - \alpha$ avec $\alpha$ petit devant $\frac{\pi}{2}$.

Une source lumineuse $S$ ponctuelle et monochromatique de longueur d'onde $\lambda$ est placée dans le plan bissecteur du dièdre formé par les miroirs, à une distance $R$ de l'arête ($AS = R$). Soient $S_1'$ l'image de $S$ donnée par $M_1$ et $S_2$ l'image de $S_1'$ donnée par $M_2$. De même, on définit $S_2'$ l'image de $S$ donnée par $M_2$ et $S_1$ l'image de $S_2'$ donnée par $M_1$. Les deux sources secondaires émettent deux ondes susceptibles d'interférer : les franges d'interférences sont observées sur un écran E perpendiculaire au plan bissecteur du dièdre et placé à une distance $d$ du point $A$ avec $d > R$.




1. Montrer par un calcul sans approximation que l'angle entre les 2 segments de droite $AS_1$ et $AS_2$ est égal à $4\alpha$. Puis, sachant que $\alpha$ est petit devant $\pi/2$, exprimer la distance $a$ entre les deux sources secondaires $S_1$ et $S_2$.

2. Donner l'expression de l'interfrange $i$ en fonction de $\lambda$, d, $R$ et $\alpha$.

3. Donner l'expression de la largeur $E_1E_2$ du champ d'interférences intercepté par l'écran ainsi que le nombre $N$ de franges brillantes observées.

4. Calculer $i$, $E_1E_2$ et $N$ pour $\lambda = 0{,}6\ \mu$m, $\alpha = 2 \,.\, 10^{-3}$ rad, $R = 10$ cm et $d = 70$ cm.

# Session 2017

# EPREUVE DE PHYSIQUE

## NB :

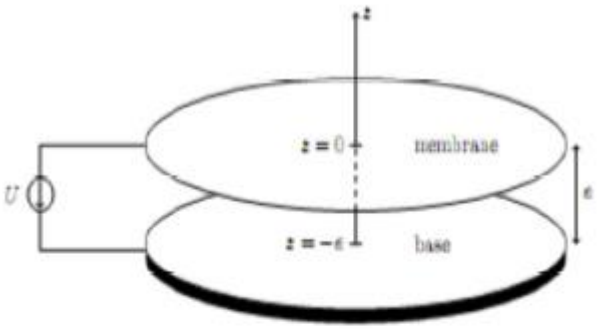
- *L'épreuve comporte trois grandes parties et des sous partie qui peuvent être traitées indépendamment les unes des autres.*
- *On attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. En particulier, il convient d'indique clairement les références des questions abordées.*
- *Les applications numériques doivent êtres données avec un nombre de chiffres significatifs raisonnable sans oublier les unités d'expression.*

# Partie A

# Electrostatique

## I. Etude d'un système de transduction électrostatique

Deux disques conducteurs de même rayon, parallèles, sont écartés d'une faible distance $e$. L'un d'eux est fixe (« la base »), l'autre constituant la membrane est mobile en translation selon l'axe Oz. La membrane de surface S est rappelée vers la position $z = 0$ par la force de rappel élastique $-kz\vec{u}_z$. Elle est également soumise, lors de ses déplacements, à la force de frottement fluide $-h\frac{dz}{dt}\vec{u}_z$.




L'air séparant les disques est assimilable, du point de vue électrostatique, au vide. Lorsqu'on établit une différence de potentiel (*ddp*) $U$ entre les disques, il apparait une charge électrique $Q$ sur la base et une charge opposée $-Q$ sur la membrane. Ces charges sont réparties uniformément sur chaque disque.

*1 – Force exercée sur la membrane*

La base est assimilée à un plan infini portant la densité surfacique de charge σ uniforme.

1.1) En utilisant les propriétés de symétrie et d'invariance de la distribution de charge, préciser, en les justifiant, la direction du champ $\vec{E}$ crée par la base seule et sa dépendance avec les coordonnées spatiales.

1.2) Comparer les champs $\vec{E}(M)$ et $\vec{E}(M')$ créés par la base seule en deux points $M$ et $M'$ symétriques par rapport au plan des charges.

1.3) En appliquant le théorème de Gauss à un cylindre d'axe Oz traversant le plan de charge, déterminer le champ $\vec{E}$ créé par la base seule dans tout l'espace en fonction de σ puis de la charge $Q$.

1.4) En déduire la force électrique $\vec{F}_e$ subie par la membrane. Est-elle attractive ou répulsive ?

1.5) L'ensemble des deux conducteurs constitue un condensateur de capacité C, fonction de z.

a) Montrer que $C(z) = \frac{\varepsilon_0 S}{e+z}$.

b) Exprimer $\vec{F}_e$ en fonction de U, $z$ et des constantes du problème.

*2 – Étude statique*

2.1) La *ddp* $U$ étant maintenue constante et égale à $U_0$. Quelle est l'équation vérifiée par la coordonnée $z_0$ de la membrane à l'équilibre? Que peut-on dire à priori du nombre de solutions de cette équation ?

2.2) On se propose de faire une discussion graphique de l'existence de ces solutions. Mettre l'équation sous la forme $Az_0 = \frac{1}{(e+z_0)^2}$ où $A$ est une fonction de $U_0$. En traçant les graphes des fonctions associées à chacun des deux membres, montrer qu'il existe des valeurs de $U_0$ pour lesquelles l'équation admet deux solutions $z_1$ et $z_2$ telles que : $-e < z_1 < z_2 < 0$.

2.3) Discuter qualitativement de la stabilité de chaque position.

2.4) Donner l'équation différentielle reliant $z(t)$ à la tension $U(t)$ en régime variable. On notera $m$ la masse de la membrane.

## II. Dipôle électrostatique dans le vide

Pour toutes les applications, on suppose l'espace rapporté à un repère orthonormé galiléen $Oxyz$ dont les vecteurs unitaires des axes Ox, Oy et Oz sont notés respectivement $\vec{e}_x, \vec{e}_y$ et $\vec{e}_z$. A un point M quelconque, on associe des coordonnées cartésiennes x, y et z ainsi que le vecteur $\vec{r} = \overrightarrow{OM} = r\vec{e}_r$. $r$ étant la norme de $\vec{r}$.

1. Dans le modèle de l'atome de Thomson, un atome d'hydrogène est assimilé à un système matériel constitué d'un noyau, de masse $m_p$, et d'un électron de masse $m_e$. La charge électrique $+e$ du noyau est supposée uniformément répartie dans une sphère de rayon $a$, de centre $P$. Un électron, considéré comme ponctuel, de charge $-e$, est libre de se déplacer dans cette sphère chargée.

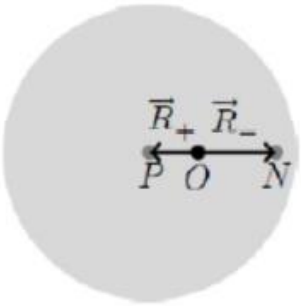
On repère un point $N$ à l'intérieur du noyau par ses coordonnées sphériques $(r, \theta, \varphi)$ relatives au centre $P$.

1.1) rappeler les lois locales de l'électrostatique.

1.2) Donner l'expression de la densité volumique de charges $\rho(N)$, associée au noyau, en tout point $N$ à l'intérieur de la sphère.

1.3) Exprimer, en utilisant les lois locales, le champ et le potentiel électrostatiques créés par cette distribution de charges en un point $N$ à l'intérieur de la sphère.

1.4) En déduire l'expression de la force électrique ressentie par l'électron situé au point $N$. Exprimer cette force en faisant apparaître le vecteur $\overrightarrow{PN}$. Donner aussi l'expression de la force que l'électron exerce sur le noyau.




1.5) Exprimer également le champ et le potentiel électrostatiques créés par le noyau en un point $M$ situé à l'extérieur de la sphère. Commenter.

1.6) Calculer de deux manières différentes l'énergie électrostatique de constitution du noyau.

1.7) analogie avec la loi d'interaction gravitationnelle

a) rappeler l'expression du champ de gravitation $\vec{G}(M)$ créé en $M$ par une masse ponctuelle $m$ placée en $P$. On notera G la constante de gravitation universelle. En déduire par analogie avec l'électrostatique la loi locale liant $\vec{G}(M)$ et la masse volumique $\rho_m(M)$.

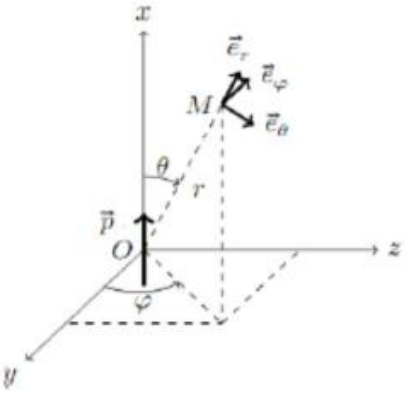
b) Donner les expressions du champ de gravitation créé par une distribution sphérique de masse uniforme de rayon a de densité volumique $\rho_m$ constante, à l'intérieur et à l'extérieur de la sphère.

2. Dans un état excité de l'atome, le noyau et l'électron peuvent osciller autour de leur barycentre, sous le seul effet de leur interaction électrique mutuelle. On note $\vec{R}_+(t) = \overrightarrow{OP}(t)$ et $\vec{R}_-(t) = \overrightarrow{ON}(t)$, les déplacements respectifs du noyau et de l'électron par rapport à O. On admet que le noyau garde sa forme sphérique. On pose $\vec{R}(t) = \vec{R}_+(t) - \vec{R}_-(t)$. Le référentiel dans lequel on étudie les mouvements du noyau et de l'électron, est supposé galiléen.

2.1) Appliquer le principe fondamental de la dynamique à l'électron et au noyau.

2.2) En déduire l'équation différentielle vérifiée par $\vec{R}(t)$.

2.3) Justifier que les mouvements relatifs de l'électron et du noyau se ramènent à celui d'une particule matérielle fictive, de masse $\mu$, soumise à une force de rappel élastique de la forme $-\mu\omega_0^2\vec{R}(t)$. Donner l'expression de $\mu$ en fonction de $m_e$ et $m_p$ et l'expression de $\omega_0$ en fonction des différents paramètres du modèle.




2.4) En envisageant le cas d'un atome d'hydrogène, proposer la valeur numérique de $\mu$.

3. De loin, l'atome est vu comme un dipôle électrostatique rigide constitué d'un proton de charge $e$ situé en $P$ et d'un électron de charge $-e$ situé en $N$, de moment dipolaire $\vec{p} = e\overrightarrow{OP} - e\overrightarrow{ON}$ parallèle à la direction $Ox$. On notera $R = NP$.

3.1) exprimer $\vec{p}$ en fonction de $\overrightarrow{NP}$.

3.2) Calculer le potentiel électrostatique créé par ce dipôle en un point M, situé à très grande distance du dipôle ($r \gg R$).

3.3) En déduire les composantes (en coordonnées sphériques) du champ électrostatique créé par ce dipôle. Trouver une relation exprimant le vecteur champ électrostatique $\vec{E}$ en fonction de $\vec{r}$ et $\vec{p}$.

3.4) Déterminer l'équation des lignes de champ sous la forme d'une relation entre r et l'angle θ.

3.5) Le dipôle (toujours rigide) est maintenant plongé dans un champ électrostatique extérieur.
Quelles sont les actions subies par ce dipôle ? (On pourra donner les expressions sans démonstrations).

3.6) Application :

Une molécule polarisable plongée dans un champ électrique $\vec{E}_{ext}$ acquiert un moment dipolaire induit $\vec{p} = \alpha\varepsilon_0\vec{E}_{ext}$.

On considère un dipôle $\vec{p}_1 = p_1\vec{e}_x$ placé en O et une molécule polarisable placée en M avec $\overrightarrow{OM} = x\vec{e}_x$.

Exprimer en fonction de $x$ la force exercée par le dipôle sur la molécule, préciser si cette force est attractive ou répulsive.

4. Mouvement d'une particule chargée plongée dans le champ électrostatique d'un dipôle

On étudie dans le plan $(O, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ le mouvement d'une particule de masse m, de charge $Q$ dans le champ d'un dipôle électrostatique de moment $\vec{p} = p\vec{e}_y$ placé en O, $p$ étant positif.

Cette particule se trouve à l'instant de date t au point M repéré par les coordonnées polaires r, θ. Les conditions initiales sont les suivantes : $r(0) = r_0, \theta(0) = 0, \dot{r}(0) = 0$ et $r(0)\dot{\theta}(0) = v_0 > 0$.

4.1. Ecrire, à partir de la relation fondamentale de la dynamique, deux équations vérifiées par r, θ et leurs dérivées par rapport au temps. On posera $k = \dfrac{pQ}{4\pi\varepsilon_0 m}$.

4.2. Ecrire alors une troisième équation, vérifiée par r, θ et leurs dérivées par rapport au temps, traduisant la conservation de l'énergie mécanique que l'on notera $E$.

4.3. Déduire des trois équations précédentes une équation ne contenant que r et ses dérivées par rapport aux temps. Intégrer cette équation et donner l'expression de $r$ en fonction de $t$, $m$, $r_0$ et $E$. Discuter suivant le signe de $E$.

4.4. On considère alors le cas particulier pour lequel la trajectoire de la particule est circulaire. Quelle est dans ce cas la valeur de E ? Décrire le mouvement de la particule et calculer sa période $T$ en fonction de $v_0$, $r_0$ et de l'intégrale définie par : $I = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{\sqrt{\cos\theta}}$.

# Partie B

# Magnétostatique

## I. champs magnétiques créé par des courants filiformes.

1. Etant donné un circuit filiforme (C) orienté, parcouru par un courant permanent d'intensité $I$, placé dans le vide (ou dans l'air), exprimer la contribution élémentaire $d\vec{B}$ associée à un élément $dl$ du circuit (C) permettant de calculer le champ magnétique $\vec{B}$ créé en un point $M$ de l'espace.

Donner les expressions des composantes de $d\vec{B}$ . On utilisera l'angle élémentaire $d\alpha$ sous lequel du point $M$, on voit cet élément.

2. Déterminer le champ magnétique $\vec{B}$ créé en un point A par la partie rectiligne CD d'un circuit parcouru par un courant $I$ (fig. E1). Exprimer le module $B = |\vec{B}|$ à l'aide des angles $\alpha_1$ et $\alpha_2$ et de la distance $a = HA$. Calculer la valeur numérique de $B$ avec $I = 100$A, a = b = 8,65 cm et c = 5cm.

3. Préciser la direction et le sens du champ magnétique $\vec{B}$ créé en un point A de son plan par un circuit carré CDEF (fig. E2) parcouru par un courant I. Calculer la valeur numérique du module $B$ si :

$I = 100$ A, b = 8,65 cm et c = 5 cm.

4. Déterminer le vecteur $\vec{B}$ créé par une spire circulaire (C) de rayon R parcourue par un courant $I$, en un point A de son axe situé à une distance OA = h de son centre O (fig. E3). Exprimer le module $B = |\vec{B}|$ à l'aide de l'angle $\gamma$; donner sa valeur particulière au centre O de la spire. Calculer numériquement B pour I = 100 A, R = 10 cm et successivement h = 0 et h = 2,5 cm.

5. Une plaque de cuisson par induction utilise une bobine plate de rayon intérieur $R_1$, de rayon extérieur $R_2$ formée d'un conducteur enroulé en spirale à spires jointives. On assimile d'abord cette bobine plate à un ensemble de $N$ spires concentriques parcourues par le même courant $I$ (fig. E4).

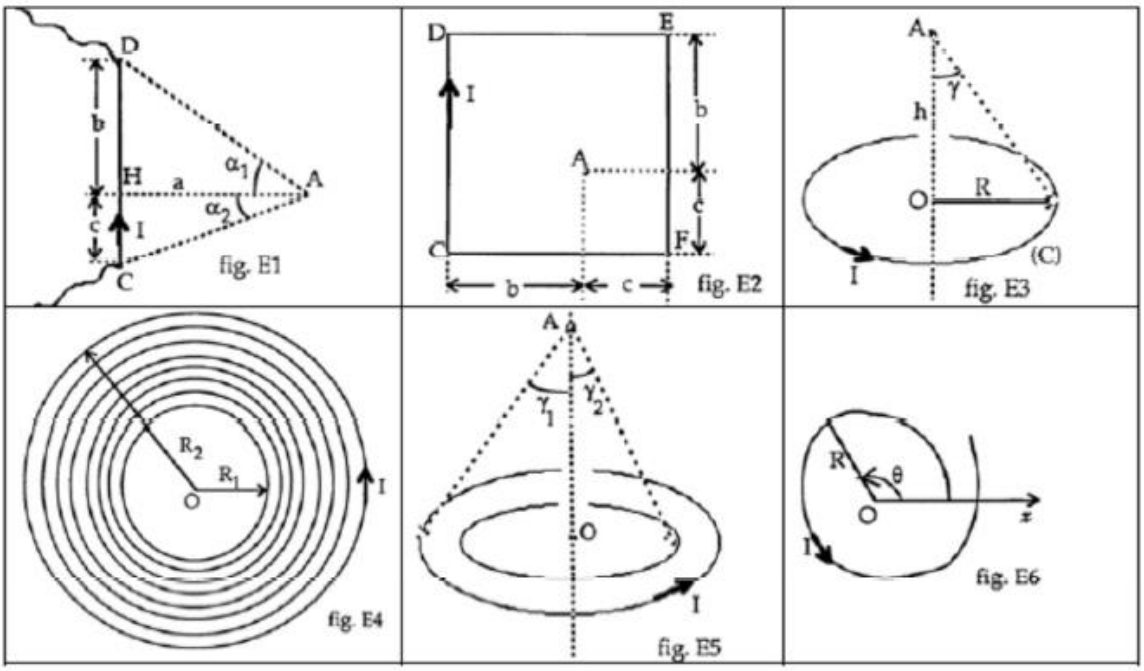
5.1 En admettant l'équivalence avec une répartition continue de spires, exprimer la densité radiale de courant équivalente $\lambda$ en relation avec $I$.

5.2 Déterminer le vecteur $\vec{B}$ au centre O de la bobine; donner l'expression du module $B = |\vec{B}|$ et calculer sa valeur numérique avec $R_1 = 2,5$ cm, $R_2 = 10$ cm, $N = 25$ spires, $I = 24$ A.

5.3 Déterminer le vecteur $\vec{B}$ en un point A de l'axe de la bobine à une distance OA = h de son centre O (fig. E5); on exprimera le module $B = |\vec{B}|$ en fonction des valeurs extrêmes $\gamma_1$ et $\gamma_2$ de $\gamma$. On rappelle que :

$\int \frac{dx}{\cos x} = \ln\left|\tan\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right|$. Calculer la valeur numérique de $B$ avec les valeurs du 1.5.2 et h = 2,5 cm.

6. On considère maintenant la bobine plate comme une spirale d'équation $R = R_1 + a\theta$ parcourue par un courant $I$ (fig. E6); déterminer le vecteur $\vec{B}$ au centre O de la bobine. Calculer la valeur numérique du module $B = |\vec{B}|$ au centre O de la spirale avec $I = 24$ A et $R = R_1 = 2,5$ cm pour $\theta = 0$ associé à $R = R_2 = 10$ cm après 25 tours complets.




## II. II. Dipôle magnétique dans le champ d'une bobine plate

1. rappeler l'expression du champ magnétique créé en un point A, de cote $z > 0$, de son axe Oz, par une bobine plate constituée de N spires circulaires de centre O de rayon R parcourues par un courant constant d'intensité I.
2. en utilisant la conservation du flux du champ magnétique, trouer une relation permettant de calculer la composante radiale du champ à une distance $r$ au voisinage de l'axe. Calculer cette composante en fonction de $r$ et $z$.
3. un dipôle magnétique rigide de moment dipolaire $\vec{M}$ est placé à une distance $r$ de l'axe au voisinage de A, exprimer l'angle que fait $\vec{M}$ avec Oz à l'équilibre. Comment varie cet angle avec z ?
4. Placé en A, le dipôle s'oriente parallèlement à l'axe.

4.a) Préciser la configuration la plus stable.

4.b) Montrer que le dipôle va subir une force magnétique dont on précisera l'expression en A, le sens et la direction. Commenter.

# Partie C
# Un télescope unitaire du VLT

Deux objets ponctuels à l'infini $A$ et $B$ sont observés dans les directions faisant des angles $i_A = 0$ et $i_B \neq 0$ par rapport à l'axe optique. Les deux directions dans lesquelles on observe à travers le télescope leurs images font respectivement les angles $i'_A = 0$ et $i'_B$ avec l'axe optique. Pour simplifier, on supposera que ces deux objets émettent une unique radiation de longueur d'onde $\lambda = 2{,}00$ µm.

## I. Montage de type Cassegrain

Les télescopes unitaires du VLT peuvent être utilisés en configuration dite « Cassegrain » (cf. figure 1). Le télescope est afocal, c'est-à-dire que l'image d'un objet situé à l'infini est à l'infini.

Le miroir primaire est un miroir sphérique concave de sommet $S_1$, de diamètre D = 8,20 m, de rayon de courbure $R_1$ = 28,8 m et le miroir secondaire est un miroir sphérique convexe de sommet $S_2$, de rayon de courbure $R_2$ = 4,52 m.

Figure 1: Un télescope unitaire du VLT en montage Cassegrain

1. Déterminer numériquement la projection algébrique $\overline{S_1F_1}$ entre le sommet et le foyer du miroir primaire.
2. Faire de même pour la projection algébrique $\overline{S_2F_2}$ entre le sommet et le foyer du miroir secondaire.
3. À quelle distance $\overline{S_2S_1}$ doivent être positionnés ces deux miroirs ? Justifier.
4. En s'appuyant sur une construction géométrique, déterminer la valeur numérique du grossissement : $G = i'_B / i_B$ .

## II. Résolution limitée par la diffraction

On admet que les phénomènes de diffraction sont dus à la limitation du faisceau lumineux par le miroir primaire de diamètre $D$.

5. En assimilant, pour simplifier, le premier miroir à une simple lentille convergente de même focale, déterminer l'ordre de grandeur du rayon $R$ de la tâche de diffraction (ou tâche d'Airy) qu'on observerait sur l'image intermédiaire formée par le miroir primaire d'un objet ponctuel à l'infini envoyant une unique radiation de longueur d'onde $\lambda$.
6. En déduire l'ordre de grandeur de l'ouverture angulaire $\Delta\theta$ du faisceau image, définie par le fait que les rayons émergent du télescope avec des angles $i'_A \pm \Delta\theta$ et $i'_B \pm \Delta\theta$ par rapport à l'axe optique.
7. En précisant le critère retenu, établir la relation que doivent vérifier les angles $i'_A \pm \Delta\theta$ et $i'_B$ pour pouvoir discerner les images formées par le télescope.
8. En déduire la valeur numérique de la limite de résolution angulaire $i_{min}$ du télescope, c'est-à-dire l'angle minimal entre deux étoiles pour que le télescope les discerne.

*****Fin de l'épreuve*****

# Annexe

## Formules d'analyse vectorielle

| Expressions en coordonnées cylindriques | Expressions en coordonnées sphériques |
|---|---|
| $\vec{\nabla}_M f = \frac{\partial f}{\partial r}\vec{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta}\vec{e}_\theta + \frac{\partial f}{\partial z}\vec{e}_z$ | $\vec{\nabla}_M f = \frac{\partial f}{\partial r}\vec{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta}\vec{e}_\theta + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial f}{\partial \varphi}\vec{e}_\varphi$ |
| $\Delta f = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial f}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$ | $\Delta f = \frac{1}{r}\frac{\partial^2 (rf)}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial f}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 f}{\partial\varphi^2}$ |
| $\vec{\nabla}\cdot\vec{A} = \frac{1}{r}\frac{\partial(rA_r)}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial(A_\theta)}{\partial\theta} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$ | $\vec{\nabla}\cdot\vec{A} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial(r^2 A_r)}{\partial r} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial(\sin\theta A_\theta)}{\partial\theta} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial A_\varphi}{\partial\varphi}$ |
| $\vec{\nabla}\times\vec{A} = \left(\frac{1}{r}\frac{\partial A_z}{\partial\theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial z}\right)\vec{e}_r + \left(\frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r}\right)\vec{e}_\theta + \frac{1}{r}\left(\frac{\partial rA_\theta}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial\theta}\right)\vec{e}_z$ | $\vec{\nabla}\times\vec{A} = \frac{1}{r\sin\theta}\left(\frac{\partial(\sin\theta A_\varphi)}{\partial\theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial\varphi}\right)\vec{e}_r + \frac{1}{r}\left(\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial A_r}{\partial\varphi} - \frac{\partial(rA_\varphi)}{\partial r}\right)\vec{e}_\theta + \frac{1}{r}\left(\frac{\partial rA_\theta}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial\theta}\right)\vec{e}_\varphi$ |

## Identités remarquables :

1) $\vec{\nabla}_M\cdot(\vec{\nabla}_M f) = \vec{\nabla}_M^2 f$ ; 2) $\vec{\nabla}_M\times(\vec{\nabla}_M f) = \vec{0}$

3) $\vec{\nabla}_M\cdot(\vec{\nabla}_M\times\vec{A}) = 0$ ; 4) $\vec{\nabla}\times(\vec{\nabla}\times\vec{A}) = \vec{\nabla}(\vec{\nabla}\cdot\vec{A}) - \vec{\nabla}^2\vec{A}$

5) $\vec{\nabla}(fg) = f\vec{\nabla}g + g\vec{\nabla}f$ ; 6) $\vec{\nabla}\cdot(f\vec{A}) = f\vec{\nabla}\cdot\vec{A} + \vec{A}\cdot\vec{\nabla}f$

7) $\vec{\nabla}\times(f\vec{A}) = f\vec{\nabla}\times\vec{A} + \vec{\nabla}f\times\vec{A}$ ; 8) $\vec{\nabla}\cdot(\vec{A}\times\vec{B}) = \vec{B}\cdot\vec{\nabla}\times\vec{A} - \vec{A}\cdot\vec{\nabla}\times\vec{B}$

9) $\vec{\nabla}\times(\vec{A}\times\vec{B}) = (\vec{\nabla}\cdot\vec{B})\vec{A} - (\vec{\nabla}\cdot\vec{A})\vec{B} + (\vec{B}\cdot\vec{\nabla})\vec{A} - (\vec{A}\cdot\vec{\nabla})\vec{B}$

10) $\vec{\nabla}(\vec{A}\cdot\vec{B}) = \vec{A}\times(\vec{\nabla}\times\vec{B}) + \vec{B}\times(\vec{\nabla}\times\vec{A}) + (\vec{A}\cdot\vec{\nabla})\vec{B} + (\vec{B}\cdot\vec{\nabla})\vec{A}$

## Expressions des opérateurs d'analyse vectorielle en fonction de nabla

**Gradient d'un champ scalaire :** $\overrightarrow{grad}_M\left(f(M,t)\right) = \vec{\nabla}_M f(M,t)$.

**Divergence d'un champ vectoriel :** $div_M\left(\vec{A}(M,t)\right) = \vec{\nabla}_M\cdot\vec{A}(M,t)$.

**Rotationnel d'un champ vectoriel :** $\vec{\nabla}_M\times\vec{A}(M,t)$.

**Laplacien scalaire :** $\Delta f = \vec{\nabla}^2 f$

*Calculatrice autorisée, tout document interdit*

## Partie A

### Quelques transformations du corps pur « eau »

Le corps pur étudié est le corps pur eau ($H_2O$).

*Hypothèses de travail et données* :

- l'eau gaz (vapeur sèche) et l'eau vapeur (en équilibre avec le liquide) peuvent être considérés comme des gaz parfaits ;
- le volume de la phase liquide est négligé devant le volume de la phase vapeur ;
- $P^*(T)$ est la pression de vapeur saturante du corps pur eau, à la température $T$ : $P^*(H_2O, 373\ K) = 1{,}00 \times 10^5$ Pa ;
- $M$ est la masse molaire de l'eau : $M = 18{,}0 \times 10^{-3}$ kg mol$^{-1}$ ;
- $R$ est la constante du gaz parfait : $R = 8{,}31$ J mol$^{-1}$ K$^{-1}$ ;

### I. Diagrammes du corps pur

Les diagrammes $P = f(T)$ et $P = f(V)$, représentés respectivement sur les figures **1** et **2**, sont les diagrammes simplifiés, et non annotés, du corps pur eau.

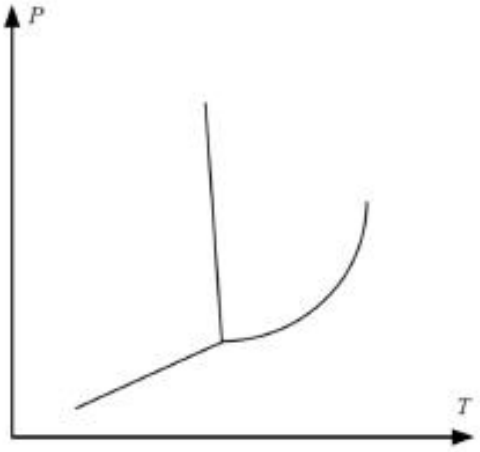



Figure **1**

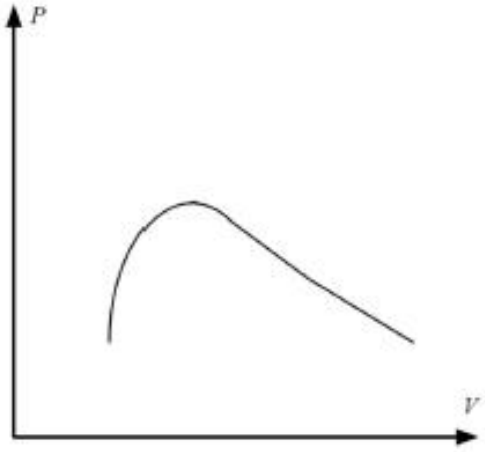



Figure **2**

**1)** Recopier et compléter ces deux diagrammes (figure **1** et **2**), en précisant la nature des différentes portions de courbes, ainsi que celle des différents domaines délimités.

**2)** La pente $p$ des droites tangentes à l'une des portions de courbe du diagramme $P = f(T)$, est négative et très élevée en valeur absolue : $p = \dfrac{dP}{dT} \to -\infty$. Justifier cette propriété.

### II. Transformation d'une masse d'eau

Un récipient, de volume intérieur variable $V$, est constitué d'un cylindre muni d'un piston mobile sans frottement. Toutes les parois diathermanes (non calorifugées) sont au contact d'une source de chaleur, de température constante $T_{ext}$ (atmosphère par exemple).

1) Le piston est immobilisé provisoirement dans une position initiale telle que le volume intérieur du cylindre est $V_i$. Exprimer, en fonction des données de l'énoncé, la masse maximale $m_{max}$ d'eau pure qui peut être injectée dans ce récipient, initialement vide, sans qu'apparaisse la phase liquide du corps pur eau.

2) La masse d'eau injectée, dans ce récipient vide, est $m$ (avec $m < m_{max}$).

**2.1** Faut-il procéder, à partir du volume $V_i$, à une augmentation, ou à une diminution du volume du récipient, de manière isotherme, pour faire apparaître la première goutte de liquide (ou goutte de rosée) ?

**2.2** Exprimer, en fonction des données de l'énoncé, le volume $V_o$ d'apparition de la phase liquide.

**2.3** Le volume $V$ est modifié, toujours à partir de la valeur $V_i$, de manière quasi-statique (ou mécaniquement réversible), jusqu'à ce que les deux masses d'eau liquide $m_\ell$ et d'eau vapeur $m_v$, en équilibre, soient égales : $m_\ell = m_v = m/2$. Exprimer, en fonction de $V_o$, le volume final $V_f$.

**2.4** Représenter la transformation subie par la masse $m$ de corps pur sur chacun des deux diagrammes précédents $P = f(T)$ et $P = f(V)$.

**2.5** Exprimer, en fonction des données de l'énoncé, la grandeur de transfert « travail » $W_{eau}$ reçue (ou mise en jeu) par le corps pur eau, au cours de la transformation.

**2.6** *Application numérique* : $m = 5 \times 10^{-3}$ kg ; $V_i = 20 \times 10^{-3}$ m$^3$ ; $T_{ext} = 373$ K.
Calculer $m_{max}$, $V_o$ et $W_{eau}$.

## Partie B

### Étude d'un filtre

L'étude expérimentale d'un filtre « R, C » série est réalisée grâce à un oscilloscope. L'exercice considère l'influence du « branchement » à l'appareil de mesure sur la pulsation de coupure, une des caractéristiques du filtre.

### I. Étude théorique du filtre « R, C » série

Un groupement $R$, $C$ série est alimenté avec une tension d'entrée $u_e(t) = U_{e,m} \cos \omega t$. La tension de sortie est notée $u_s(t) = U_{s,m} \cos(\omega t + \varphi)$ (figure **3**).

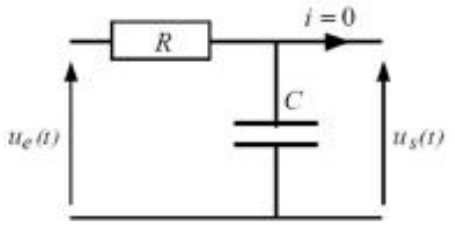



Figure **3**

1) Étudier, sans calcul, la nature de ce filtre, en envisageant son comportement limite pour $\omega \to 0$ et $\omega \to +\infty$ .

2) Déterminer, en fonction de $R$, $C$ et $\omega$, la fonction de transfert complexe $\underline{H}(j\omega)$ de ce filtre définie par le rapport des tensions complexes $\underline{u}_s$ et $\underline{u}_e$ : $\underline{H}(j\omega) = \dfrac{\underline{u}_s}{\underline{u}_e}$.

3) En déduire :
   **3.1** le gain $G$, défini par $G = |\underline{H}(j\omega)|$ ;
   **3.2** la phase $\varphi$ ;
   **3.3** la pulsation de coupure $\omega_C$, définie par $G(\omega_C) = \frac{G_{max}}{\sqrt{2}}$.
4) Donner l'allure des courbes représentatives des fonctions $G(\omega)$ et $\varphi(\omega)$.
5) *Application numérique* : $R = 10^4\ \Omega$ et $C = 10^{-8}$ F.
   Calculer $\omega_C$.

## II. Branchement à l'oscilloscope

La tension de sortie $u_s$ précédente est « appliquée » à l'entrée d'un oscilloscope, par l'intermédiaire d'un câble coaxial supposé idéal. L'impédance d'entrée de l'oscilloscope est caractérisée par le groupement parallèle $R_o$, $C_o$. La tension d'entrée $u_e$ est maintenue ($u_e(t) = U_{e,m} \cos \omega t$) et $u'_s$ est la tension de sortie aux bornes du résistor $R_o$ (figure **4**).

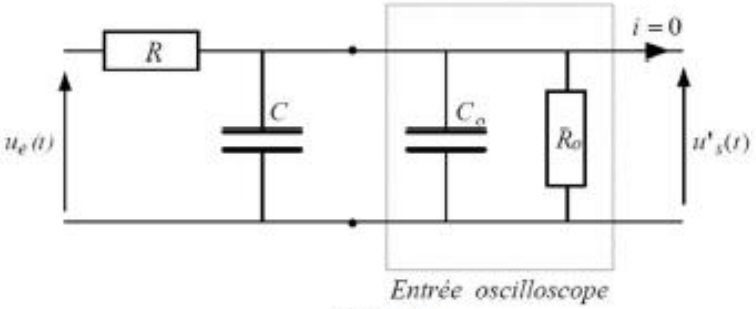



Figure **4**

1) Montrer que la fonction de transfert $\underline{H}'(j\omega) = \frac{\underline{u}'_s}{\underline{u}_e}$ de ce nouveau filtre se met sous la forme : $\underline{H}'(j\omega) = \frac{A}{1 + jB\omega}$, avec $A$ et $B$ constantes. Exprimer $A$ et $B$ à l'aide des données de la figure **4**.
2) En déduire le nouveau gain $G'$.
3) Exprimer, en fonction de $R$, $R_o$, $C$ et $C_o$, la pulsation de coupure $\omega'_C$ correspondante.
4) *Application numérique* : $R = 10^4\ \Omega$ ; $R_o = 5 \times 10^6\ \Omega$ ; $C = 10^{-8}$ F ; $C_o = 5 \times 10^{-11}$ F.
   Calculer $\omega'_C$.
5) Comparer les pulsations $\omega_C$ et $\omega'_C$. Conclure.

# Partie C

### Transferts thermiques : étude d'un « chauffe-eau »

Un résistor, parcouru par un courant électrique, permet de chauffer, grâce à l'effet Joule, une masse $m$ d'eau contenue dans un ballon calorifugé (chauffe-eau).

*Hypothèses de travail et données* :

- la masse d'eau contenue dans le ballon est $m = 100$ kg ;
- le coefficient (ou capacité) thermique massique de l'eau est $c_e = 4{,}18 \times 10^3$ J kg$^{-1}$ ;
- la pression $P$, à l'intérieur du récipient, est égale à la pression constante du milieu extérieur : ($P = P_{ext} = 1{,}01$ bar) ;

- le changement d'état liquide-vapeur est négligé : l'eau reste liquide ;
- le résistor, lorsqu'il est alimenté, fournit une puissance thermique constante $P_{th} = 1{,}5 \times 10^3$ W ;
- les parois du récipient, ainsi que le matériau isolant, sont de capacité thermique négligeable ;
- la température constante du milieu extérieur est $T_{ext} = 290$ K.

## I. Préliminaires

La masse d'eau est un système fermé (sans échange de matière avec l'extérieur). Ce système, noté ($\mathcal{S}$), est soumis à la pression extérieure constante $P_{ext}$.

**1)** Exprimer l'enthalpie $H_S$ du système ($\mathcal{S}$), en fonction de son énergie interne $U_S$ et de certains de ses paramètres d'état.

**2)** ($\mathcal{S}$) subit une transformation quelconque, au cours de laquelle il reçoit (ou met en jeu), à pression extérieure $P_{ext}$ constante, la quantité de chaleur $Q_{Pext}$. Démontrer l'égalité $\Delta H_S = Q_{Pext}$.

**3)** En l'absence de tout changement d'état, ($\mathcal{S}$) reçoit une quantité élémentaire (ou infinitésimale) de chaleur $\delta Q_{Pext} = dH_S$ et sa température $T$ varie de $dT$. Relier les grandeurs élémentaires $\delta Q_{Pext}$ et $dT$.

## II. Le récipient est supposé thermiquement isolé

Les parois du chauffe-eau sont athermanes : le récipient est supposé parfaitement calorifugé. À l'instant initial $t = 0$, la masse d'eau est à la température $T_{ext}$ et le chauffage est mis en œuvre, avec la puissance thermique $P_{th}$ constante.

**1)** Exprimer, en fonction des données de l'énoncé, la quantité de chaleur $Q_{Pext}$ que doit recevoir l'eau pour que sa température $T$ atteigne la valeur $T_1$ ( $> T_{ext}$).

**2)** Quelle sera la durée $\Delta t$ du transfert thermique ?

**3)** *Application numérique* : $T_1 = 350$ K.
Calculer $Q_{Pext}$ et $\Delta t$.

## III. Le récipient est soumis à des pertes thermiques

En réalité, l'eau, à température $T$, subit des pertes thermiques dues au fait que le réservoir est imparfaitement isolé du milieu extérieur (température constante $T_{ext}$). La quantité de chaleur $\delta Q_{Pext}$, mise en jeu par ($\mathcal{S}$) pendant la durée infinitésimale (ou élémentaire) $dt$, est de la forme : $\delta Q_{Pext} = -k\,(T - T_{ext})\,dt$ (avec $k$ constante).

**1)** ***« Marche forcée » du chauffe-eau***

Le procédé dit de la « marche forcée » permet d'évaluer les pertes. En régime permanent, par apport continu de la puissance thermique $P_{th}$, et au bout d'un temps très long, la température $T$ de l'eau atteint une valeur limite $T_{lim}$. À ce stade, le chauffage permet juste de compenser les pertes thermiques.

**1.1** Rappeler le signe de la constante $k$.

**1.2** Exprimer la constante $k$, en fonction de $P_{th}$ et des températures données.

**1.3** *Application numérique* : $T_{lim} = 370$ K.
Calculer $k$.

# Partie D

## Haut parleur

Il s'agit dans cette partie, d'illustrer l'application de l'induction électromagnétique dans le fonctionnement du haut-parleur électrodynamique.

L'espace est rapporté, en coordonnées cylindriques $(r, \theta, z)$, à un repère de base $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z)$. Le haut-parleur est essentiellement un système à symétrie cylindrique, constitué (figure **1**) :

- d'un aimant immobile comprenant deux cylindres coaxiaux d'axe $z'z$ horizontal et créant un champ magnétique $\vec{B} = B\,\vec{e}_r$ radial, et de norme constante et uniforme dans l' « entrefer » ;
- d'une bobine indéformable (solénoïde) $\mathcal{B}$ de même axe $z'z$, comportant $N$ spires circulaires de rayon $\rho$ et insérée dans l'entrefer ;
- d'une membrane souple (pavillon) $\mathcal{M}$, solidaire de la bobine, et pouvant subir des translations axiales de part et d'autre de sa position d'équilibre définie par $z = 0$.

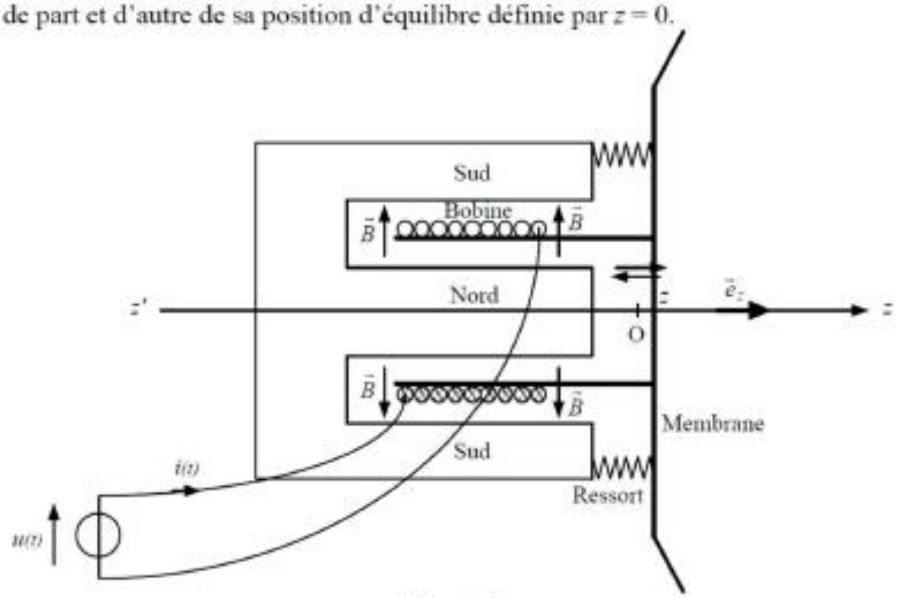



Figure **1**

Lorsqu'une source de tension $u(t)$ est branchée aux bornes de la bobine plongée dans le champ magnétique, celle-ci, parcourue par un courant d'intensité $i(t)$, se met en mouvement sous l'effet des forces de Laplace. Ce mouvement entraîne la membrane qui vibre dans l'air, créant ainsi des ondes sonores.

Dans l'air, le mouvement crée une force de frottement fluide $\vec{f}_f = -\alpha \,.\, v\,\vec{e}_z$, opposée ($\alpha$ constante positive) à la vitesse $\vec{v} = v\,\vec{e}_z$ de la membrane.

L'ensemble $\{\mathcal{M},\mathcal{B}\}$, de masse $m$, est élastiquement lié à un support fixe par un dispositif élastique, modélisé par un ressort unique de constante de raideur $k$ et exerçant sur l'ensemble une force de rappel $\vec{f}_r = -k \,.\, z\,\vec{e}_z$.

Il est admis qu'au cours des déplacements, le poids du dispositif et la réaction du support se compensent.

D'un point de vue électrique, la bobine est modélisée par une inductance pure $L$ en série avec une résistance $R$.

Le problème est considéré dans le cadre de l'approximation des régimes quasi-stationnaires (ARQS).

## I. Étude préliminaire

L'espace est, pour cette seule question, rapporté en coordonnées cartésiennes $(x, y, z)$, à un repère de base $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$. Soit un courant d'intensité $i$ positive qui circule dans une portion AD de fil rigide, parallèle à l'axe $Ox$, de longueur $AD = \ell$, de milieu $\Omega$ et plongée dans le champ magnétique $\vec{B} = B\,\vec{e}_y$ uniforme, avec $B > 0$. Les fils de connexion sont parallèles à l'axe $Oy$ (figure **2**).

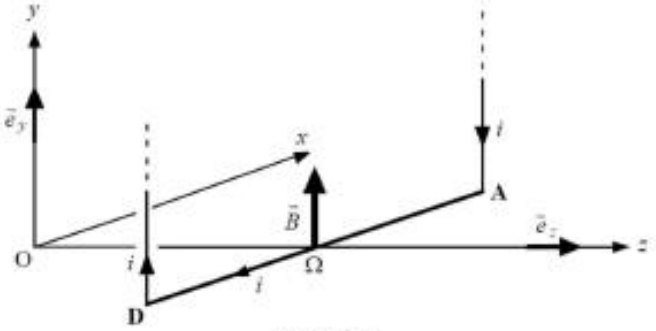



Figure **2**

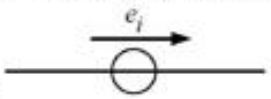
**1)** Recopier sommairement le schéma de la figure **2** et dessiner la résultante $\vec{f}_L$ des forces de Laplace qui s'exercent sur la portion de fil AD.

**2)** Déterminer, en fonction des données de l'énoncé, l'expression vectorielle de cette force $\vec{f}_L$.

**3)** La portion de fil rigide AD et les fils de connexion sont animés d'un mouvement de translation de vitesse $\vec{v} = v\ \vec{e}_z$, (avec $v$ algébrique).

**3.1** Dessiner, sur le schéma précédent (§ **A.I.1**), et dans le cas d'une vitesse $v$ positive, le vecteur champ électromoteur $\vec{E}_{m,i}$ induit dans la portion de fil AD.

**3.2** Préciser sur cette portion de fil AD (schéma § **A.I.1**), toujours dans le cas d'une vitesse $v$ positive, l'orientation de la f.é.m. (force électromotrice) induite $e_i$ en utilisant le symbole suivant :




**3.3** Établir l'expression de cette f.é.m. induite $e_i$.

*La suite des questions porte désormais sur le fonctionnement du haut-parleur*

## II. Comportement mécanique de la partie mobile du haut-parleur

**1)** Écrire, en fonction des données de l'énoncé, l'expression vectorielle de la résultante $\vec{f}_L$ des forces de Laplace qui s'exercent sur la bobine $\mathcal{B}$, parcourue par le courant d'intensité $i(t)$.

**2)** Par application du théorème de la résultante dynamique appliqué à l'ensemble $\{\mathcal{M}, \mathcal{B}\}$ de masse $m$, établir une équation différentielle qui relie $z(t)$ et $i(t)$, et qui traduit le comportement mécanique de la partie mobile du haut-parleur. Cette équation, notée **(E₁)**, est de la forme :

$$\frac{d^2z}{dt^2} + a\,\frac{dz}{dt} + b\,z = c\,i(t) \qquad \textbf{(E}_1\textbf{)}$$

avec $a$, $b$ et $c$ constantes.

**3)** Exprimer les coefficients $a$, $b$ et $c$ en fonction des données de l'énoncé.

## III. Loi des mailles et comportement électrique

1) Montrer que la f.é.m. (force électromotrice) induite $e_i(t)$ dans la maille, constituée par le générateur de tension $u(t)$ et la bobine, s'exprime sous la forme $e_i(t) = h\,\dfrac{dz}{dt}$ (avec $h$ constante positive). Exprimer $h$ en fonction des données de l'énoncé.
2) Appliquer la loi des mailles à l'ensemble générateur-bobine et écrire l'équation différentielle, vérifiée par le courant $i(t)$, qui traduit le comportement électrique du haut-parleur. Cette équation, notée **(E₂)**, est de la forme :

$$u(t) = a'\,\frac{di}{dt} + b'\,i(t) + c'\,\frac{dz}{dt} \qquad \textbf{(E}_2\textbf{)}$$

avec $a'$, $b'$ et $c'$ constantes.
3) Exprimer les coefficients $a'$, $b'$ et $c'$ en fonction des données de l'énoncé.

## IV. Tension d'alimentation $u(t)$ alternative sinusoïdale

La tension $u(t)$ d'alimentation du haut-parleur est alternative sinusoïdale, de pulsation $\omega$. Aux grandeurs physiques $u(t)$, $i(t)$ et $z(t)$, toutes de pulsation $\omega$, peuvent être associées les fonctions complexes respectives $\underline{u}(t) = \underline{u}_0\,e^{j\omega t}$, $\underline{i}(t) = \underline{i}_0\,e^{j\omega t}$ et $\underline{z}(t) = \underline{z}_0\,e^{j\omega t}$. Il est rappelé que la dérivée temporelle d'une fonction complexe $\underline{f}$ du type $\underline{f}(t) = \underline{f}_0\,e^{j\omega t}$ s'écrit : $\dfrac{d\underline{f}}{dt} = j\omega\underline{f}$.

En combinant les équations différentielles **(E₁)** et **(E₂)**, la tension d'alimentation $\underline{u}(t)$ et l'intensité $\underline{i}(t)$ vérifient l'équation $\underline{u}(t) = \underline{Z}\,\underline{i}(t)$, expression dans laquelle $\underline{Z}$ est une impédance complexe. L'ensemble générateur–haut-parleur peut donc être représenté par le modèle électrique suivant (figure **3**) :

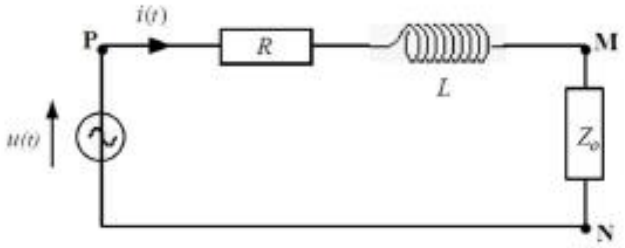



Figure **3**

modèle dans lequel le dipôle MN présente l'impédance complexe $\underline{Z}_0$.

1) Donner l'impédance complexe $\underline{Z}_{PM}$ du dipôle PM.
2) En posant $\beta = 2\pi\rho VB$ et $\gamma = \left(\dfrac{k}{\omega} - m\omega\right)$, exprimer, en fonction de $\alpha$, $\beta$ et $\gamma$, l'impédance complexe $\underline{Z}_0$.

# Partie E

## Four à micro-ondes

Une brioche (gâteau) notée (**B**), considérée comme homogène, isotrope et sphérique (rayon $R$ et centre $O$), est réchauffée dans un four à micro-ondes.

*Hypothèses de travail* :

- tout point $M$ de l'espace est repéré notamment par le vecteur $\overrightarrow{OM} = r\,\vec{e}_r$, avec $\vec{e}_r$ vecteur « tournant » d'un système de coordonnées sphériques, d'origine $O$ ;
- la sphère (**B**), constituée d'un matériau de conductivité thermique $\lambda$ constante, est conductrice de la chaleur ;
- la conduction thermique est unidimensionnelle (variable $r$) et radiale : les surfaces isothermes sont sphériques, de centre $O$ ;
- à l'intérieur de (**B**), $\vec{j}_{th}(r)$ (en W m$^{-2}$) est le vecteur densité de flux thermique, vecteur radial, et $\Phi(r)$ (en W) le flux thermique à travers la sphère de rayon $r$, de centre $O$ et de surface $S(r)$ ;
- $\vec{j}_{th}$ est lié à la température par la loi de Fourier : $\vec{j}_{th} = -\lambda\,\overrightarrow{grad}\,T$, expression qui s'écrit, compte tenu des considérations de symétrie :

$$\vec{j}_{th} = j_{th}(r,t)\,\vec{e}_r = -\lambda\,\frac{\partial T(r,t)}{\partial r}\,\vec{e}_r\ ;$$

- à l'intérieur du four, l'appareil délivre une puissance thermique totale $P_{th}$ constante, entièrement absorbée par (**B**) (l'air sec enveloppant la brioche est insensible aux micro-ondes) ;
- la puissance volumique $p$ (en W m$^{-3}$), absorbée à l'intérieur du gâteau, est supposée uniforme et constante ;
- le flux thermique sortant de la brioche s'évacue rapidement, grâce à l'air ventilé, à l'extérieur du four : la paroi externe de (**B**) est ainsi maintenue à la température constante $T_o$ ;

- l'air sec enveloppant la brioche ne présente aucune absorption thermique, et est maintenu à la température constante $T_o$ ;
- le phénomène est envisagé en régime permanent et stationnaire : $\vec{j}_{th} = -\lambda\,\dfrac{dT(r)}{dr}\,\vec{e}_r$.

**1)** Rappeler la relation qui existe entre $\Phi(r)$, $j_{th}(r)$ et $S(r)$.

**2)** Soit le volume élémentaire $dV$ de (**B**), compris entre les sphères concentriques, de centre O et de rayons respectifs $r$ et $r+dr$. Exprimer, en fonction de la variable $r$, le volume élémentaire $dV$.

**3)** En déduire, en fonction de $p$ et de la variable $r$, la puissance thermique $dP_{th}$ reçue, grâce à l'absorption des micro-ondes, par cet élément de volume $dV$.

**4)** Présenter, toujours pour cet élément de volume élémentaire $dV$, un bilan des flux thermiques, c'est-à-dire une relation entre les flux $\Phi(r)$ et $\Phi(r+dr)$.

**5)** En déduire une équation différentielle reliant la fonction $T(r)$ et la variable $r$, et qui s'écrit sous la forme : $\dfrac{dT(r)}{dr} = K_1\,r + \dfrac{K_2}{r^2}$, avec $K_1$ et $K_2$ constantes.

**6)** Quelles relations existe-t-il, toujours en régime stationnaire, entre $\Phi(R)$ et $P_{th}$ d'une part, et $P_{th}$ et $p$ d'autre part ?

**7)** En déduire la valeur de la constante $K_2$.

**8)** Intégrer l'équation différentielle de la question § **5**, et déterminer l'expression de la température $T(r)$ à l'intérieur de la brioche, en se rappelant que $T(R) = T_o$.

**9)** Tracer l'allure de la courbe représentative de la fonction $T(r)$.

**10)** Localiser la partie la plus « carbonisée » de la brioche, si celle-ci est maintenue trop longtemps dans le four en fonctionnement.

# CONCOURS AFRIQUE

## Épreuve d'anglais

***Durée : 1.5h***

*L'usage de tout système électronique ou informatique est interdit dans cette épreuve.*

## Part I - GRAMMAR

*Choose the word or phrase that best completes the sentences and put the corresponding letter on the answer sheet.*

1. After you've finished this question, you can go on _____ the next question.

a. answered b. answer c. to answering d. to answer

2. You can use the weekly discussion forum to ask questions, discuss content and _____ assignments as directed.

a. to submitting b. submit c. submitting d. submitted

3. We all agreed in the department that a decision _____ immediately.

a. can be to make b. ought to be made c. should have made d. must make

4. When _____a tough day at work, all I want to do is go home and relax in front of my Netflix.

a. I was had b. I was having c. I'll have d. I've had

5. I expect my lecturer to _____ for not handing in my homework on time.

a. tell me off b. set me up c. ask on me d. come up me

6. The Japanese have never _____ to flat-sharing in the way that the Europeans have.

a. given b. fallen c. run d. taken

7. If he _____ the tram onto a different track, he will save the five engineers, but the tram will hit one other engineer who would otherwise have survived.

a. diverts b. will divert c. diverted d. had diverted

8. If you _____ the Prime Minister, what would you do to improve France?

a. are b. will be c. would be d. were

9. The weather _____ is unusually hot this month, has started to make people ill.

a. - b. that c. what d. which

10. The mugs, _____ were dirty, were left on the counter.

a. most of them b. many of whom c. most of which d. many of that

11. Sorry I'm late - I stopped _____ a man cross the road.

a. helping b. to help c. and help d. helped

12. We regret _____ that due to a fire on the line, all trains to Gare St Lazare have been cancelled until further notice.

a.by announce b. to announce c. announcement d. and announced

13. _____ none of his books had been praised by critics, Erwin never gave up his dreams of becoming a respected author.

a. Even b. Despite c. During d. Although

14. The other children looked _____ her because her parents were poor.

a. up with b. down to c. down on d. out to

15. If you have any questions on filling out your application form for the engineering degree, the admissions office will be more than _____ to help you.

a. cheer b. gladden c. joyously d. happy

16. Mother could be angry. We _____ not stay out late tonight.

a. would b. rather c. sooner d. had better

17. It's so hot; I _____ drive by night than leave in the morning.

a. would b. would rather c. prefer d. better

18. Not only _____ the sights in Chicago, we also managed to do some shopping as well.

a. we saw b. we were seeing c. do we see d. did we see

19. I'd rather you _____ tomorrow, not today, if that's OK with you.

a. came b. come c. will come d. are coming

20. Don't you think it's high time you _____ a job? You've been out of university now for a year!

a. find b. have found c. will find d. found

21. When it _____ dark, we'll have to stop what we're doing and go home.

a. gets b. will get c. got d. would get

22. As most of the members were absent, the meeting turned _____ to be a waste of time.

a. up b. down c. in d. out

23. Please stop writing. You _____ not make any more marks on your answer sheet.

a. would b. can't c. ought d. may

24. _____ people choose not to become whistle-blowers due to the fear of retaliation.

a. Lot of b. Any c. Many d. Much

25. Algebra is the branch of mathematics concerned with operations on sets of numbers or other elements that are often represented _____ symbols.

a.at b. to c. in d. by

## Part II- VOCABULARY

26. If you have any questions _____to the day of the test, please contact the school you have chosen or the organisers.

a. prior b. before c. next d. advance

27. What's something you cannot _____ to buy now but would like to in the future?

a. let b. afford c. permit d. enable

28. Do you think the average human _____ will increase in the next 20 years?

a. lifespan b. life-duration c. expectancy d. life-lasting

29. _____ to file your tax returns on time may result in a 10 % penalty.

a. Failure b. Omit c. Neglect d. Absence

30. My grandmother left _____instructions regarding her will.

a. fully b. deeds c. circumvent d. explicit

31. She had reached the _____ of her career when she became the Prime Minister of her country.

a. ambition b. zeal c. zenith d. moment

32. Engineers always design spacecraft with _____ systems so that if the primary one fails the secondary one can take over.

a. redundant b. relic c. remorse d. repel

33. That type of behavior is _____ in most human beings.

a. ominous b. ornate c. innate d. mundane

34. Our English teacher reminded us that our writing style shouldn't be _____; rather, it

should be clear and straightforward.

a. innate b. ornate c. obstinate d. taciturn

35. The English language department examined the available TOEFL preparation books scrupulously; then they _____ several they felt to be of good educational value.

a. advocated b. claimed c. embellish d. endorsed

## Part III Reading Comprehension

**'It's pretty easy to talk instead': pupils react to French phone ban**

Students at Plouasne middle school in Brittany, France, which banned the use of mobile phone on its grounds four years ago. Adapted from the Guardian by Angelique Chrisafis. 7 Sep 2018. At the end of lessons at Claude Debussy middle school in Paris, a classical music jingle played instead of a bell and teenagers poured out of the gates. Several 13-year-olds quickly reached into their bags to check their mobile phones, which had been switched off for eight hours. From this week, children's phones have been banned from all state middle schools in France under a new law that President Emmanuel Macron said would help detox teenagers from their screens. "I thought I would be freaked out, but it has been fine," said one 13-year-old girl, who got an iPhone when she was 11. "I left my phone in my bag all day and I was surprised to find it didn't bother me. Normally I'd be on Snapchat and Instagram. But my friends are here at school so it's pretty easy to just talk instead." She said she would probably use her phone more at home. "My parents don't set rules on phone use, but I've made my own rule: I don't check my phone after 11.30pm on a school night." Her friend, also 13, said she liked using her phone for watching shows on Netflix but the school connection was always too patchy for that, so she used to look at photos and listen to music at break time. "I haven't found it hard to ignore my phone this week," she said. "But there is still a physical reflex sometimes to reach for it and get it out." The school in Paris's 15th arrondissement – where 460 pupils aged 11 to 15 come from a mix of high-income backgrounds and poorer families –

prepared for the law by introducing phone-free Mondays last term. Previously, staff had noticed that children at break time would mostly be standing in the playground looking at their phones. "About four or five weeks into our phone-free Monday experiment, we saw children bringing packs of cards into school to play in break time," said the principal, Eric Lathière. "We hadn't seen cards at school for years. Children brought books in to read and pupils stood around chatting far more than they had before." He said he approved of the new law: "It's about educating people on phone addiction – and not just children, adults too. Any moment in the day when you can try to do [something] without a phone requires an effort but it's a habit worth forming." He was adamant, however, that the ban should not be seen as anti-technology. "We can't go against digital; that would be like trying to keep schools back from the evolution of society. It's about education around tech use."

The centrist Macron made banning phones in schools part of his election manifesto not long after the New York city mayor, Bill de Blasio, did the opposite, overturning a ban on phones in public schools in 2015, saying parents wanted to keep in touch with their children. The French education minister has called the ban a detox law for the 21st century, saying teenagers should have the right to disconnect. Children's phones were already banned in classrooms – except for teaching purposes – but under the new law they are banned everywhere inside the gates, including playgrounds and canteens. The French senate expanded this to allow high schools to ban phones if they choose, but few, if any, are expected to do so. Many suggest 18-year-old pupils with the right to vote can make their own decision on phones. Frédérique Rolet, the secretary general of the SNES-FSU teaching union, said the first week of the ban appeared to have gone smoothly but stressed the law wasn't a monumental change: 60% of state middle schools had already decided in recent years to ban phones from playgrounds. "The education minister sought to appeal to parents, saying he was aware of the problem of phone addiction," she said. "But there are other important problems, such as growing class sizes, job cuts and the lack of teaching staff that also need to be talked about." Schools that had previously banned phones said they had noticed more social interaction

and empathy between children, and a readiness to learn at the start of lessons. Jean-Noël Taché, the principal of a middle school with 800 pupils in a small town in rural Aveyron, introduced the phone ban this week. "There had been so much media talk about it that pupils and families were wellprepared," he said. "It's as if children not using their phones at school has simply become habit." Previously, his pupils could use their phones at break time. "But we'd noticed that little by little the phone use was moving from the playground into the hall, then into the corridors, the lunch queues, outside the classroom door. Pupils weren't making calls, they were sending messages, playing on or looking at their phone – it was like it had become an extension of their hand." In Paris, Michèle Bayard, a modern literature and language teacher, said she hadn't noticed pupils complaining about the ban. "This could bring a focus on new activities and interaction." But at the school gate, a 14-year-old girl felt more credit should be given to teenagers. "There is this idea that our generation can't concentrate or has lost the ability to socialise. That's not true," she said. "When I'm with friends, showing them a picture on my phone or looking something up just adds to our conversation. It's a shame that I can't do that inside school anymore."

## Comprehension check

**36. What is the main idea of this article?**

a. To introduce phone free Mondays at school

b. To explain what is happening at a school where the use of phone on its grounds was banned four years ago.

c. To inform us about how teenagers are using their phones to watch shows on Netflix.

d. It is about the new law aimed at detoxing teenagers from their screens.

**37. Where has the ban on phones already come into effect?**

a. Just at Claude Debussy school in Paris.

b. All the state middle schools in France.

c. Just at Plouasne middle school in Brittany, France.

d. Both the middle schools and high schools in France.

**38. What did teachers notice the pupils doing instead of looking at their phones?**

a. Pupils are probably now using their phones more at home.

b. Pupils are using their phones to watch shows on Netflix.

c. Pupils are playing cards, reading and talking.

d. Pupils are complaining about the ban.

**39. Why didn't the ban take pupils and their parents by surprise?**

a. There had been so much in the media about the ban so they were well prepared.

b. Children's phones were already banned in classrooms but nothing had been said in the media.

c. Both the pupils and their parents knew that the ban was necessary.

d. Pupils and their parents were educated on phone addiction.

**40. What other benefits have teachers noticed?**

a. Little by little, their phone use was moving from the playground into the hall.

b. Pupils could use their phones to look for information and hence perform better at school.

c. Pupils are now playing more with board games rather than sending messages.

d. Pupils are more ready and willing to start lessons on time and there is more social interaction and empathy between children.

**41. The word closest in meaning to the word 'adamant' in paragraph 6 is**

a. agreeable and not totally convinced about a position

b. flexible and ready to prove a position

c. insistent especially in maintaining an opinion

d. forceful and not ready to impose an opinion

**42. What is meant by the phrase 'phone-free Mondays'?**

a. phones are free on Mondays

b. phones can only be used freely on Mondays

c. phones are not allowed on Mondays

d. phones are given freely to pupils on Mondays

**43. The word 'overturning' in paragraph 7 is closest in meaning to**

a. strenghtening

b. destroying

c. reversing

d. straightening

**44. The word 'sought' in paragraph 9 is closest in meaning to**

a. resorted to

b. acquired

c. attempted

d. requested

**45. What was NOT mentioned about pupils in the article?**

a. sending messages with their phones

b. browsing Facebook at break time

c. spending time on Snapchap and Instagram

d. watching shows on Netflix

# CONCOURS AFRIQUE

**Feuille de réponses**

**Épreuve d'anglais**

**Durée : 1.5h**

**Nom :**_____

**Prénon :**_____

**Date de naissance :**_____

**Date du concours :**_____

| | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1. | A | B | C | D | 10. | A | B | C | D | 19. | A | B | C | D | 28. | A | B | C | D | 37. | A | B | C | D |
| 2. | A | B | C | D | 11. | A | B | C | D | 20. | A | B | C | D | 29. | A | B | C | D | 38. | A | B | C | D |
| 3. | A | B | C | D | 12. | A | B | C | D | 21. | A | B | C | D | 30. | A | B | C | D | 39. | A | B | C | D |
| 4. | A | B | C | D | 13. | A | B | C | D | 22. | A | B | C | D | 31. | A | B | C | D | 40. | A | B | C | D |
| 5. | A | B | C | D | 14. | A | B | C | D | 23. | A | B | C | D | 32. | A | B | C | D | 41. | A | B | C | D |
| 6. | A | B | C | D | 15. | A | B | C | D | 24. | A | B | C | D | 33. | A | B | C | D | 42. | A | B | C | D |
| 7. | A | B | C | D | 16. | A | B | C | D | 25. | A | B | C | D | 34. | A | B | C | D | 43. | A | B | C | D |
| 8. | A | B | C | D | 17. | A | B | C | D | 26. | A | B | C | D | 35. | A | B | C | D | 44. | A | B | C | D |
| 9. | A | B | C | D | 18. | A | B | C | D | 27. | A | B | C | D | 36. | A | B | C | D | 45. | A | B | C | D |

9/9

**2022-2**

# CONCOURS AFRIQUE

## Épreuve d'anglais

***Durée : 1.5h***

*L'usage de tout système électronique ou informatique est interdit dans cette épreuve.*

## Part I - GRAMMAR

*Choose the word or phrase that best completes the sentences and put the corresponding letter on the answer sheet.*

1. If you have any questions _____ the day of the test, please contact the school you have chosen or the organizers.

**a. beforehand** **b. due to** **c. prior to** **d. until**

2. The success of any test administration depends, to a great extent, _____ the suitability of the test site.

**a. to** **b. of** **c. on** **d. in**

3. We were surprised to _____ out that she was actually quite eager to mow the lawn.

**a. find** **b. found** **c. finding** **d. having found**

4. A secret Uber program internally dubbed "Hell" _____ spied on arch-rival Lyft to determine which drivers were working double shifts for both companies.

**a. allege** **b. alleged** **c. allegedly** **d. allegation**

5. Lucy Stone, _____ first feminists in the US, helped organize the American Woman Suffrage

Association in the 19th century.

**a. another** **b. the one** **c. who was the** **d. one of the**

6. Without heat from the Sun, the Earth would soon become _____ cold that nothing could live on it.

**a. too** **b. enough** **c. such** **d. so**

7. _____ the word 'atom' comes from the Greek for indivisible, we now know that atoms are not the smallest particles of matter.

**a. Despite** **b. Although** **c. In spite of** **d. Meanwhile**

8. _____ engineering, I would have specialised in Alternative Energies.

**a. If I study** **b. Unless I study** **c. Had I studied** **d. Were I study**

9. Paige graduated with honors, _____ her many challenges.

**a. in spite** **b. despite** **c. whereas** **d. even though**

10. The crime rate in the Abuja suburbs has declined due to efforts on the part of the Federal government and the local government to curb _____.

**a. it** **b. its** **c. them** **d. theirs**

11. When the sun _____ down, it gets dark.

**a. will go** **b. goes** **c. went** **d. had gone**

12. _____ we arrived at the hotel, when she called us about the incident.

**a. Little did** **b. Not only did** **c. Rarely have** **d. Hardly had**

13. There was a bare _____ of people at the club last week.

**a. hand** **b. handless** **c. handful** **d. handout**

14. You look worried. What _____ about?

**a. think you** **b. do you think** **c. do you thinking** **d. are you thinking**

15. Do you belong _____ any campus clubs or organizations?

**a. to** **b. in** **c. at** **d. on**

16. The blow fell, as I suspected it _____. He was made redundant last week.

**a. would** **b. should** **c. will** **d. can**

17. He was so depressed at the _____ her again.

**a. thought to face** **b. thought of facing** **c. thinking of facing** **d. thought in facing**

18. We _____ spend our holiday travelling instead of lying on a beach.

**a. 'd better to** **b. 'd rather to** **c. 'd rather** **d. 'd better**

19. _____ people have been investing in the stock market recently because it's been stagnant the last few months.

**a. Less** **b. A lot** **c. Much** **d. Fewer**

20. Were we _____ her the job, we couldn't be sure that she would accept.

**a. to offer** **b. offered** **c. offering** **d. be offered**

21. You don't seem _____ interested in my problems!

**a. none at all** **b. by no means** **c. the least bit** **d. not at all**

22. Martin Luther King, Jr.'s magnificent speaking ability _____ him to effectively express the demands for social justice for Black Americans.

**a. to enable** **b. enabled** **c. was enabling** **d. enabling**

23. Many of the recording instruments used in _____ branches of science are kymographs.

**a. varying** **b. varied** **c. variety** **d. various**

24. Over the past few years North Korea _____ out missile tests in defiance of UN sanctions.

**a. has carried** **b. carried** **c. is carrying** **d. was carrying**

25. We are considering _____ a lunchtime session next month. Please indicate any scheduling preferences you may have.

**a. start** **b. to start** **c. to starting** **d. starting**

26. Since our intern left, my workload has _____ increased.

**a. importantly** **b. significant** **c. considerably** **d. considerable**

## Part II - VOCABULARY

27. The housing market has been very _____ these past few years in Edinburgh.

**a. fascinated** **b. dynamism** **c. shortage** **d. sluggish**

28. If there's any _____ with the materials, please contact us immediately.

**a. discrepancy** **b. distinguishing** **c. drawback** **d. flourishing**

29. Shimon Peres, a long-time _____ of a two-state solution to the Israeli-Palestinian conflict, died in 2016 at the age of 93.

**a. endeavor** **b. appearance** **c. advocate** **d. allegiance**

30. According to an Ipsos MORI poll in the UK, two-thirds of the electorate don't _____ any negative impact on their personal finances from Brexit.

**a. forecast** **b. foregone** **c. forewarn** **d. foresee**

31. An attempt was made to shift the _____ of care from hospitals to the local community.

**a. harmony** **b. charge** **c. burden** **d. affluence**

32. The distracted driver narrowly avoided _____ the tree.

**a. running into** **b. coming across** **c. dealing with** **d. coming unto**

33. The US leader met his Chinese _____ Xi Jinping for talks, which focused on trade and North Korea.

**a. partner** **b. counterfeit** **c. counterpart** **d. competitor**

34. I'd really love to have the new Apple watch, but unfortunately, it's too_____so I can't afford it.

**a. dear** **b. cheer** **c. cheap** **d. priceless**

35. If you happen to_____ a hard question, skip it and move onto the next one.

**a. run against b. come across c. come into d. run across**

## Part III - Reading Comprehension

Financial crisis Vs. climate peril It is hard to think of anybody who has a busier diary at the moment than Lord Turner of Ecchinswell, who has found himself advising the government on how to save both capitalism and the planet. Turner, who is a former management consultant, became chairman of the Financial Services Authority (FSA) in September 2008; he is also working as chairman of the government's independent environment watchdog, the Committee on Climate Change. Turner described his first weeks in charge of both bodies as "the most extraordinary weeks of my professional career". The committee will soon publish its first report recommending targets to cut greenhouse gas emissions, working towards the government's pledge to reduce climate change emissions by 80% by 2050. The muchawaited announcement will include interim targets for the first three five-year periods covering 2008 to 2022 – and advise the government on what cuts could be made from which sectors, particularly energy, transport and industry. Turner has announced he will give up the committee chairman's role after this report, but will stay on the panel at a time when many fear green policies will be blunted by the need to battle the economic recession– or "temporary downturn" as Turner calls it. As he has promised at the FSA, he is likely to take a tough line: "The recession will flatter our emissions figures over the next two years because one of the immediate effects of an economic downturn is less output, less development, etc. Hopefully we'll recover in 2010, but the fact that we're going into a severe recession now really doesn't change the medium or long-term plan of moving towards a low-carbon economy." In the past, Turner has called for the UK to stop using fossil fuels (coal, gas and oil) within 20 years. This week he went further, saying that to make such steep emissions cuts the country was likely to need a big increase in renewable power, nuclear power and carbon capture/storage equipment for coal plants to replace existing high-carbon generation. Other changes would include replacing gas heating in homes with electric heating and oil-fuelled cars with electric ones. "Even though we'll get more and more efficient in our use of electricity it's quite possible that the long-term trend of electrical production will be up because we'll use more electricity to do things." he said. Turner did not comment on whether the committee will criticise plans to build new coal power stations using only partial carbon-capture equipment at Kingsnorth in Kent.

However, his report will provide support for government plans to build new nuclear stations, as well as renewable energy, Turner said. "We think the way forward will have to include all three of those, rather than just one or the other." James Hansen, one of the world's leading climate scientists, has called for an immediate halt to the building of all coal-fired power stations to prevent catastrophic

global warming. He warned that 1m species would be made extinct because of climate change and calculated that Kingsnorth, which would emit 20,000 tonnes of Co2 a day, would be responsible for 400 of these. He said that sea levels were rising at a rate of 3 cm per decade, twice as much as the rate in the 20th century. When asked why one UK plant was so important, when China and India were building large numbers of such plants, he said the UK, US and Germany were most responsible for today's climate change on a per capita basis: "We have to get the rest of the world to cooperate but somebody has to take the lead." Lord Turner's report will urge the government: to increase its target to cut emissions; to include aviation and shipping; and to include all greenhouse gases, not just carbon dioxide. However, the government has made it clear that, at least initially, emissions from internationally regulated aviation and shipping will not be part of the five year "budgets". The budgets were set to take account of progress towards the 2050 target, the UK's commitments to European Union emissions goals, and a bottom-up analysis of what it was possible to do in different sectors. The report will also deal with a recommendation about how many compensatory credits UK companies can buy from projects which cut emmissions overseas. The EU has set a target to cut emmissions from 1990 level by at least 20% by 2020, and by 30% if there is a global deal with other large scale emitters.

*Adapted from The Guardian, 27th November 2008.*

**D'après le texte, pour chaque question, une seule proposition est correcte :**

36. A. Turner has been given the task of helping to find solutions for the current economic crisis as well as for the issue of global warming.

B. Turner has to decide which is a more important priority for the UK government: saving capitalism or fighting climate change.

C. Turner's job of advising the government on different issues means that he is hardly busy at all.

37.A. Turner is chairman of the Financial Services Authority and a management consultant.

B. Turner is chairman of the Financial Services Authority, a management consultant and chairman of the Committee on Climate Change.

C. Turner is chairman of the Financial Services Authority (FSA) and chairman of the Committee on Climate Change.

38. A. The committee's first report will advise the government to consider cutting greenhouse gas emissions by 80% between now and 2050.

B. The committee's first report will advise the government to set 2022 as the date on which to reach an 80% reduction in greenhouse gas emissions.

C. The committee's first report will advise the government on specifics about where and what cuts should be made.

39. A. After publication of the report Turner intends to continue working on the Committee on Climate Change in the same capacity as before.

B. After publication of the report Turner intends to resign as Chairman but continue collaborating with the Committee on Climate Change.

C. After publication of the report Turner intends to leave the Committee on Climate Change and to devote himself entirely to dealing with the economic crisis.

40. A. Turner thinks that in the short term the recession will have a positive impact on the environment through a reduction of greenhouse gas emissions.

B. Turner has warned the FSA that the country is going into a long and deep recession.

C. Turner thinks that the UK should revise its ambitions of becoming a low-carbon economy in the medium term.

41.A. Turner now realises that it is unrealistic to expect Britain to stop using fossil fuels.

B. Turner expects that due to improved efficiency in the production of electricity, consumption of this source of energy will decrease in the long-term future.

C. Turner thinks fossil fuels will be replaced more and more by electricity.

42.A. Although coal is a carbon emitting fossil fuel, Turner fully supports the Government's development of coal power stations such as the one planned for Kingsnorth in Kent.

B. Turner feels that the government should be focussing on nuclear and renewable energy rather than building coal power stations.

C. Turner seems resigned to the inevitable necessity of accepting coal power plants along with nuclear and renewable sources.

43. A. James Hansen has warned that Kingsnorth would be responsible for making 400 species extinct. B. James Hansen has warned that Kingsnorth would cause sea levels to rise by 3 cm every ten years. C. James Hansen thinks that India and China should be allowed to continue building coal power plants because their per-capita emissions are still far lower than those of the US, the UK and Germany.

44.A. The government will most certainly reject all three of the recommendations in Turner's report. B. The government will probably accept only two of the three recommendations in Turner's report and totally reject the third one.

C. The government is likely to reject one of the three recommendations in the short term at least.

45.A. The five-year budgets will analyse, among other things, to what extent the UK is keeping its promise to meet EU emissions goals.

B. Turner's report disapproves of British companies buying 'credits' from foreign companies in order to increase their own emissions.

C. The EU aims to cut emissions by at least 30% by 2020.

# CONCOURS AFRIQUE

## Feuille de réponses

## Épreuve d'anglais

## Durée : 1.5h

**Nom :**_____

**Prénon :**_____

**Date de naissance :**_____

**Date du concours :**_____

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 1. Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ | 10. Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ | 19. Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ | 28. Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ | 37. Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ |
| 2. Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ | 11. Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ | 20. Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ | 29. Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ | 38. Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ |
| 3. Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ | 12. Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ | 21. Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ | 30. Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ | 39. Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ |
| 4. Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ | 13. Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ | 22. Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ | 31. Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ | 40. Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ |
| 5. Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ | 14. Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ | 23. Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ | 32. Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ | 41. Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ |
| 6. Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ | 15. Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ | 24. Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ | 33. Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ | 42. Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ |
| 7. Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ | 16. Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ | 25. Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ | 34. Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ | 43. Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ |
| 8. Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ | 17. Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ | 26. Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ | 35. Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ | 44. Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ |
| 9. Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ | 18. Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ | 27. Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ | 36. Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ | 45. Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ |

## 2019

*L'usage de tout système électronique ou informatique est interdit dans cette épreuve.*

## Exercice 1 : Synthèse de documents

Rédiger en anglais et en 250 mots environ une synthèse des documents proposés. Vous indiquerez avec précision à la fin de votre synthèse le nombre de mots qu'elle comporte. Un écart de 10% en plus ou en moins sera accepté. Votre synthèse comportera un titre comptabilisé dans le nombre de mots.

Ce sujet propose les 2 documents suivants :

### Document 1

How Does Vitamin D Affect Women's Health?

By Erin Donnelly Michos

Sometimes a little bit of sunshine is the best medicine. A walk in the park or a bike ride probably puts you in a good mood, and a moderate amount of sun is also good for your physical health. While you're outside soaking up rays, your body is busy making vitamin D. That's good news, because this hormone that's boosted by exposure to sunlight plays an important role in women's health.

We have known for a long time about vitamin D's critical role in bone health. (Did your mom tell you to drink vitamin D-rich milk to build strong bones and teeth?) More recently, though, vitamin D has been linked to having a potential role in a number of chronic diseases, including heart disease, cancer, inflammation and autoimmune disease.

Erin Michos, M.D., associate director of preventive cardiology at the Johns Hopkins Ciccarone Center for the Prevention of Heart Disease, explains why vitamin D is important for women's health and how to make sure you're getting enough.

Q: Why is vitamin D important?

A: Research I have done in this area has found that people with low blood levels of vitamin D have a greater risk of a heart attack, heart failure, stroke, diabetes or high blood pressure later in life. In pregnant women, low vitamin D levels are linked to pre-eclampsia, gestational diabetes and adverse pregnancy outcomes. No matter your age or stage of life, having adequate vitamin D levels is important.

Q: What's the link between vitamin D and heart health?

A: That isn't entirely clear. We know that low vitamin D levels are a risk factor for heart disease, but at this time, we do not know whether treating low vitamin D with supplements can prevent a heart attack. There are a number of large clinical trials studying this now. Part of the problem with finding the answer is accounting for the many factors involved in heart disease. For example, maybe people who develop heart disease are also getting less physical activity outdoors. It may not be low vitamin D levels causing the heart disease.

Q: Should people consider vitamin D supplements?

A: If the level of vitamin D in your blood is less than 20 nanograms per milliliter, your doctor may recommend taking a supplement. Many women already take calcium and vitamin D supplements together for bone health because vitamin D can help in calcium absorption, and they work best when taken together. Ask your doctor if supplements are right for you.

From: Hopkinsmedicine.com

**Document 2**

## Many Older Women Don't Need Vitamin D Supplements

By Nicholas Bakalar

Vitamin D supplements may be ineffective in improving bone density or bone strength in postme- nopausal women, a clinical trial has found.

Researchers randomized 230 women to one of three groups: a low-dose group who took 800 units of vitamin D daily; a high-dose group who took 50,000 units twice a month; and a group that received placebo pills.

All had similar vitamin D blood levels at the start of the study, about 20 milligrams per deciliter. By the end of one year, the average vitamin D levels were 42 in the high-dose group, 27 in the low-dose group, and 18 in the placebo group.

Calcium absorption increased about 1 percent in the high-dose group, while decreasing 2 percent in the low-dose group and 1.3 percent in the placebo takers. But there was no difference among groups in changes in bone mineral density or trabecular bone score, a measure of osteoporosis risk. Nor was there any difference in the number of falls or the ability to exercise. The study is in JAMA Internal Medicine.

"Right now, our patients are getting mixed messages from 'don't bother taking D at all' to 'take 2,000 too 4,000 units a day,' so what are we to do?" said the lead author, Dr. Karen E. Hansen, an associate professor of medicine at the University of Wisconsin. "This study supports a middle-of-the-road approach. If your D level is 20 or higher, that's enough, and if you're low, you can achieve that with 600 to 800 units a day."

From: nytimes.com

## Exercice 2 : Expression écrite

Rédiger un essai d'environ 200 mots.

Topic: Some people believe that education is always a good thing, whatever the course studied. Others claim that only those who are studying medicine, IT or law have good job opportunities and that other courses are a waste of time. What is your opinion? Use specific reasons and examples to support your answer.

## 2018-1

### Exercice 1 : Synthèse de documents

Rédiger en anglais et en 250 mots environ une synthèse des documents proposés. Vous indiquerez avec précision à la fin de votre synthèse le nombre de mots qu'elle comporte. Un écart de 10% en plus ou en moins sera accepté. Votre synthèse comportera un titre comptabilisé dans le nombre de mots.

Ce sujet propose les 2 documents suivants :

### Document 1

**Energy sector must use new tech to ensure the vulnerable aren't left behind**

*By Dev Tayal 16/03/2018*

A Choice survey revealed last year that electricity bills have become the biggest worry for Australian households. Providing everyone in the community with electricity in a fair, affordable and efficient way seems to be problematic for governments, with increasing costs, the growing impact of greenhouse gas emissions, and the risk of unreliable supply all proving to be stumbling blocks.

Australia has significant inequities in its pricing structures that often see vulnerable customers, particularly those in Indigenous communities, endure a drastically different service quality. These customers often have higher barriers to accessing energy efficient appliances and renewable technologies.

Under current pricing structures, lower income households spend a higher proportion of their income on electricity. So the challenge for policy makers, regulators and utility companies is to figure out how to provide affordable, reliable and clean electricity to all consumers.

The good news is there are innovative technological solutions on the way that will optimise our use of energy. These technologies will generate clean and renewable energy, provide ways to store it

1/3

and, perhaps most importantly for households struggling with bills, automate its use in the most efficient and affordable way.

But technology will not solve the social equity issues. As seen with the uptake of solar and storage technologies, it is vulnerable customers who are left behind. They are likely to find it harder to finance energy saving services and smart appliances due to limited cash flow.

Energy efficiency policies must evolve and expand to facilitate energy optimisation. In a promising signal of future possibilities, innovative companies, such as Matter, have started exploring how to overcome some of the barriers in energy markets via incentive redistribution schemes – for example ensuring renters and landlords are not left out of the solar revolution.

But, as the late academic Gill Owen recognised: "Disadvantaged households are not a homogenous group and they do not have identical needs." This is where market-driven responses could help as it avoids the need to design specific solutions. It also allows investors, utilities, governments and customers to share and trade incentives, and collaborate on products for individual households or communities.

Properly designed, a market platform by which customers could access alternative forms of financing and exchange services with others would also enhance the value of the network beyond the single dimension of transporting electricity, helping increase value for both utilities and customers.

Disruption of the energy sector is only set to accelerate, and the era of energy optimisation has arrived. The energy sector needs to ensure it works with new technologies in a way that does not leave the vulnerable more disadvantaged. New incentive frameworks and markets established to encourage long-term, efficient investments will require a little risk-taking from investors, a little cooperation from governments and policy-makers, and a whole lot of innovation. Let's not waste the opportunity.

From: The Guardian

## Document 2

**Good news about renewables: but the heat is still on to cut fossil fuel use**
By Business Leader 25/03/2018

For optimists, it was tempting to view three years of flatlining global carbon emissions, from 2014-16, as the new normal. We now know celebrations should be put on hold. Figures for 2017 published last week show global emissions from energy have jumped back up again, to a historic high.

The problem for the climate is that more than 70% of the growth came from fossil fuels. Gas was the fastest-growing fossil fuel. But even coal, the most carbon-intensive fuel, reversed two years of declines and was up by 1%, as coal burning in China, India and South Korea grew.

To compound matters, progress on energy efficiency slowed dramatically in the face of lower energy

prices and weakening government policy. On the plus side, renewables were the fastest-growing source of new energy and had another unprecedented year. China added as much solar power in a single year as the total installed capacity across France and Germany. The US scored the steepest drop in emissions, despite Donald Trump's first year as president, as new renewable generation bloomed. However, stratospheric growth in renewables is not enough. Renewables put a brake on emissions but they don't stop coal, oil and gas from being dug out of the ground.

So, if the energy sector is still nowhere near compatible with the demands of climate science, and the goals set by nearly 200 governments in Paris three years ago, what do we do?

Despair is not an option, and there are reasons for hope. One is Beijing's self-interest in tackling air quality, which means coal plant closures and bans, and the promotion of electric cars. India, the coal industry's last great hope, has witnessed a faster than expected rise in solar power, squeezing out coal projects. Germany's new government finally has plans to tackle the country's outmoded reliance on coal. Globally, coal capacity will begin shrinking in 2022 at the current rate of retirements, according to a new report.

Arguably the brightest and most promising trend is that renewables are on the brink of being economically viable without government subsidies. In the UK alone, an estimated £20bn worth of wind and solar farms could be built without subsidies between now and 2030.

But getting to the top of the carbon emission mountain and down again will not be achieved solely with more favourable economics and stronger government support.

Leaders must take the much more politically difficult decision to penalise fossil fuels. The means are many: economy-wide carbon taxes are an obvious one that many energy firms claim to support. Bans on extraction of fossil fuels are a more extreme example. We must vote for those politicians who are bold enough to do this. We must renew pressure on them to say no to dirty energy, as well as yes to clean energy. Only then do we have a hope of permanently reducing emissions.

From: The Guardian

## Exercice 2 : Expression écrite

Rédiger un essai d'environ 200 mots.

**Topic**: Do you think that people when they solve problems as a group, they come up with better solutions that if they were to try to solve the problem individually?

## Exercice 1 : Synthèse de documents

Rédiger en anglais et en 250 mots environ une synthèse des documents proposés. Vous indiquerez avec précision à la fin de votre synthèse le nombre de mots qu'elle comporte. Un écart de 10% en plus ou en moins sera accepté. Votre synthèse comportera un titre comptabilisé dans le nombre de mots.

Ce sujet propose les 2 documents suivants :

### Document 1

**Artificial Intelligence's 'Black Box' Is Nothing to Fear**

*By Vijay Pande, 25/01/2018*

Alongside the excitement and hype about our growing reliance on artificial intelligence, there's fear about the way the technology works. A report by the AI Now Institute recommended that public agencies responsible for criminal justice, health care, welfare and education shouldn't use such technology.

Given these types of concerns, the unseeable space between where data goes in and answers come out is often referred to as a "black box". In the context of A.I., the term more broadly suggests an image of being in the "dark" about how the technology works: We put in and provide the data and models and architectures, and then computers provide us answers while continuing to learn on their own, in a way that's seemingly impossible for us to understand.

There's particular concern about this in health care, where A.I. is used to classify which skin lesions are cancerous and to identify very early-stage cancer from blood. But these fears about the implications of black box are misplaced. A.I. is no less transparent than the way in which doctors have always worked — and in many cases it represents an improvement, augmenting what hospitals can do for patients and the entire health care system. After all, the black box in A.I. isn't a new problem due to new tech: Human intelligence itself is a black box.

1/3

Let's take the example of a human doctor making a diagnosis. Afterward, a patient might ask that doctor how she made that diagnosis, and she would probably share some of the data she used to draw her conclusion. But could she really explain how and why she made that decision? Sure, she'd probably give a few indicators about what pointed her in a certain direction — but there would also be an element of guessing, of following hunches.

If the same diagnosis had been made with A.I., we could draw from all available information on that particular patient — as well as data anonymously aggregated across time and from countless other relevant patients everywhere, to make the strongest evidence-based decision possible. It would be a diagnosis with a direct connection to the data, rather than human intuition based on limited data and derivative summaries of anecdotal experiences with a relatively small number of local patients.

The irony is that compared with human intelligence, A.I. is actually the more transparent of intelligences. Unlike the human mind, A.I. can — and should — be interrogated and interpreted. Like the ability to audit and refine models and expose knowledge gaps in deep neural nets and the debugging tools that will inevitably be built and the potential ability to augment human intelligence via brain-computer interfaces, there are many technologies that could help interpret artificial intelligence in a way we can't interpret the human brain. In the process, we may even learn more about how human intelligence itself works.

From: The New York Times

## Document 2

***What's Next for Humanity: Automation, New Morality and a 'Global Useless Class'***

*By Kimiko de Freytas 19/03/2018*

Just as the Industrial Revolution created the working class, automation could create a "global useless class," Noah Harari, a Jewish historian, said. Disruptive technologies, which have helped bring enormous progress, could be disastrous if they get out of hand.

"Every technology has a good potential and a bad potential," he said. With disruptive technology the danger is far greater, because it has some wonderful potential. There are a lot of forces pushing us faster and faster to develop these disruptive technologies and it's very difficult to know in advance what the consequences will be, in terms of community, in terms of relations with people, in terms of politics."

Time is 'accelerating.'
"Time is accelerating," Mr. Harari said. The long term may no longer be defined in centuries or millenniums — but in terms of 20 years. "It's the first time in history when we'll have no idea how human society will be like in a couple of decades," he said.

"We're in an unprecedented situation in history in the sense that nobody knows what the basics about how the world will look like in 20 or 30 years. Not just the basics of geopolitics but what the job market would look like, what kind of skills people will need, what family structures will look like,

what gender relations will look like. This means that for the first time in history we have no idea what to teach in schools."

New technologies could hijack democracy, and even our sense of self.
The combination of biotech and I.T. might reach a point where it creates systems and algorithms that understand us better than we understand ourselves and so it threatens liberal democracy.

"Liberal democracy trusts in the feelings of human beings, and that worked as long as nobody could understand your feelings better than yourself, he said. "But if there is an algorithm that understands you better and you don't even understand that this is happening, then liberal democracy will become an emotional puppet show," he added. "What happens if your heart is a foreign agent, a double agent serving somebody else, who knows how to press your emotional buttons, who knows how to make you angry, how to make you joyful? This is the kind of threat we're beginning to see emerging today, for example in elections and referendum."

In a complex, interconnected world, morality needs to be redefined.
"To act well, it's not enough to have good values," Mr. Harari said. "You have to understand the chains of causes and effects."

Stealing, for example, has become so complicated in today's world. Back in biblical times, Mr. Harari said, if you were stealing, you were aware of your actions and their consequences on your victim. But theft today could entail investing in a very profitable but unethical corporation that damages the environment and employs an army of lawyers and lobbyists to protect itself from lawsuits and regulations.

The problem, he said, is understanding the "extremely complicated chains of cause and effect" in the world. "My fear is that we are not just up to it. We have created such a complicated world that we're no longer able to make sense of what is happening."

*From: The New York Times*

## Exercice 2 : Expression écrite

Rédiger un essai d'environ 200 mots.

**Topic**: In the past four decades, technology has fundamentally altered our lives: from the way we work, to how we communicate. However, advances in technology pose difficult ethical questions for humanity. Do you think we can trust technology with taking moral decisions? Can we for example ensure that artificial intelligence is used for beneficent purposes or that self-driving cars can evaluate the ethics of different situations?

# CONCOURS 2017

## Épreuve d'ANGLAIS

**Durée : 2h**

*L'usage de tout système électronique ou informatique est interdit dans cette épreuve.*

Exercice 1 : Synthèse de documents

Rédiger en anglais et en 250 mots environ une synthèse des documents proposés. Vous indiquerez avec précision à la fin de votre synthèse le nombre de mots qu'elle comporte. Un écart de 10% en plus ou en moins sera accepté. Votre synthèse comportera un titre comptabilisé dans le nombre de mots.

Ce sujet propose les 2 documents suivants :

## Document 1

**We're Seeing a Trend Toward Less Violence in the World**

*By Emma Ashford 06/09/2016*

At an event in May, President Obama noted: "The world is less violent than it has ever been." It might seem difficult to reconcile this sentiment with daily horrors in the Middle East, terrorist attacks and other media-hyped doom and gloom. But he's right: Though violent conflicts still happen around the world, the broad trend lines are all in the right direction.

The number of conflicts, whether between states or within them, has fallen dramatically in recent decades. Between 1990-2014, the overall number of conflicts fell 40 percent. And while there will always be extreme cases like the violence in Syria, today's conflicts in general have lower levels of violence. Perhaps more important, modern wars tend to be small and localized; the most destructive and costly kind of war -- conflict between great power states -- has not occurred for more than 60 years. Even terrorism is far less of a concern than many assume, particularly for those who live outside war zones. For an American, the odds of dying in a terrorist attack is an astronomically unlikely one in 45 million.

To be sure, there are still intractable conflicts in the Middle East, Latin America and elsewhere. Colombia may have reached a tentative peace deal, but diplomats have so far been unable to find peaceful resolution to conflicts in Syria, Yemen, Ukraine and elsewhere. Political science research suggests that some of these will be difficult to resolve: Studies show that the average civil war lasts about 10 years, and can be worsened by the involvement of external states, a fact that goes some way toward explaining the Syrian quagmire. But these contemporary conflicts simply cannot compare to the carnage of the two World Wars, or the Cold War threat of nuclear annihilation.

Over the long-term, the president is right. The world is trending away from violence.

From: The New York Times

## Document 2

According to the Numbers, It's Still a Dangerous World

*By John Arquilla 06/09/2016*

There are two basic ways to measure whether the world is becoming a less dangerous place: counting the number of deadly quarrels and assessing their degree of lethality. Neither of these approaches offers much room for optimism, given current trends.

Take wars, for example. While the total number of ongoing conflicts is down about 20 percent from a high of 51 in 1991, the number of wars has increased by a third over just the last six years – from 31 to 41 (with Colombia now excluded from the current count). Even worse, the last two years have seen the highest levels of violently inflicted deaths in armed conflicts since the fall of the Berlin Wall in 1989. Given that many wars – even those that feature relatively small numbers of battle deaths – occur in countries with poor infrastructure and a paucity of resources, the number of "indirect deaths" because of disease and starvation has soared as well.

Then there is terrorism. Simply put, on the cusp of the 15th anniversary of Al Qaeda's attacks on America, the "global war on terror" that President George W. Bush once proclaimed has morphed into terror's war on the world. There were just under 2,000 terrorist attacks in 2001 that resulted in 14,000 deaths and injuries. By 2015 that number had risen to nearly 15,000 attacks and more than 80,000 deaths and injuries. That's a seven-fold increase in incidents and a quintupling of casualties.

Interestingly, almost a third of the deaths and 40 percent of the injuries due to terrorism in 2015 occurred in Iraq and Afghanistan – the two countries where the United States has been most closely engaged in the post-9/11 era. These results should encourage introspection, in the Pentagon and elsewhere, about the specific manner in which operations against terrorist networks are undertaken – and about the fraught grand strategy of nation-building that has gone so terribly awry, at ruinous cost.

Armed conflict and terrorism in our time hardly begin to approach the carnage of the previous century's world wars. But that is beside the point. Such general wars are relatively rare in human history. Before the world wars one would have to look back to the Napoleonic era to find a similar level of military mayhem. And before that to the Thirty Years' War. Today, and for many tomorrows, such grand-scale wars are highly unlikely, given the shared worldwide concern about avoiding escalation of a conflict to the level of nuclear war.

But, as the late, great political theorist Kenneth Waltz first noted nearly 60 years ago, "the mutual fear of big weapons may produce, instead of peace, a spate of smaller wars." He was right, as the rising tide of war and terror proves.

From: The New York Times

Exercice 2 : Expression écrite

Rédiger un essai d'environ 200 mots.

**Topic**: with the advance of phones, tablets, and e-readers, ebooks have become a popular reading standard. Still there's something about the feel of an old-fashioned paper book. Which one in your opinion is better and why?

# ANGLAIS

**1,5h**

*L'usage de tout système électronique ou informatique est interdit dans cette épreuve.*

## Exercice 1 : Synthèse de documents

Rédiger en anglais et en 250 mots environ une synthèse des documents proposés. Vous indiquerez avec précision à la fin de votre synthèse le nombre de mots qu'elle comporte. Un écart de 10% en plus ou en moins sera accepté. Votre synthèse comportera un titre comptabilisé dans le nombre de mots.

Ce sujet propose les 2 documents suivants :

**Document1**

### Can Students Have Too Much Tech?

By SUSAN PINKER, JAN 30 2015

PRESIDENT OBAMA's domestic agenda, which he announced in his State of the Union address this month, has a lot to like: health care, maternity leave, affordable college. But there was one thing he got wrong. As part of his promise to educate American children for an increasingly competitive world, he vowed to "protect a free and open Internet" and "extend its reach to every classroom and every community."

More technology in the classroom has long been a policy-making panacea. But mounting evidence shows that showering students, especially those from struggling families, with networked devices will not shrink the class divide in education. If anything, it will widen it.

In the early 2000s, the Duke University economists Jacob Vigdor and Helen Ladd tracked the academic progress of nearly one million disadvantaged middle-school students against the dates they were given networked computers. The researchers assessed the students' math and reading skills annually for five years, and recorded how they spent their time. The news was not good.

"Students who gain access to a home computer between the 5th and 8th grades tend to witness a persistent decline in reading and math scores," the economists wrote, adding that license to surf the Internet was also linked to lower grades in younger children.

In fact, the students' academic scores dropped and remained depressed for as long as the researchers kept tabs on them. What's worse, the weaker students (boys, African-Americans) were more adversely affected than the rest. When their computers arrived, their reading scores fell off a cliff.

We don't know why this is, but we can speculate. With no adults to supervise them, many kids used their networked devices not for schoolwork, but to play games, troll social media and download entertainment. (And why not? Given their druthers, most adults would do the same.)

The problem is the differential impact on children from poor families. Babies born to low-income parents spend at least 40 percent of their waking hours in front of a screen — more than twice the time spent by middle-class babies. They also get far less cuddling and bantering over family meals than do more privileged children. The give-and-take of these interactions is what predicts robust vocabularies and school success. Apps and videos don't.

If children who spend more time with electronic devices are also more likely to be out of sync with their peers' behavior and learning by the fourth grade, why would adding more viewing and clicking to their school days be considered a good idea? (...)

From: nytimes.com

**Document 2**

## Children should be allowed to use mobiles in class because they help them learn, study says

By LAURA CLARK FOR THE DAILY MAIL, 3 September 2008

Children should be allowed to use their mobile phones in class because they can serve as 'learning aids', a study claims today.

Academics are calling on schools to rethink bans on phone handsets after trials suggested that functions such as calculators, stopwatches and email can be 'educational'.

However, the call is certain to infuriate many teachers and parents, who will be concerned that pupils will be unable to resist the temptation to put the devices to less productive uses, such as cyber-bullying or cheating in tests.

During a nine-month experiment involving classes aged 14 to 16, pupils either used their own mobiles in lessons or the new generation of ' smartphones' which allow internet connection.

They were used to create short films, set homework reminders, record a teacher reading a poem and time experiments with the phones' stopwatches.

The smartphones also allowed pupils to access revision websites, log into the school email system, or transfer electronic files between school and home.

The study by researchers at Nottingham University involved 331 pupils in schools in Cambridgeshire, West Berkshire and Nottingham.

'At the start of the study, even pupils were often surprised at the thought that mobile phones could be used for learning,' Dr Elizabeth Hartnell-Young will tell the annual conference of the British Educational Research Association in Edinburgh later today.

'After their hands-on experience, almost all pupils said they had enjoyed the project and felt more motivated.'

One teacher told researchers that students like mobiles and they know how to use them.

'Using this technology gives them more freedom to express themselves without needing to be constantly supervised,' the teacher said.

From: dailymail.co.uk

## Exercice 2 : Expression écrite

Rédiger un essai d'environ 200 mots.

**Topic:** Some people believe that the Earth is being harmed (damaged) by human activity. Others feel that human activity makes the Earth a better place to live. What is your opinion? Use specific reasons and examples to support your answer.