Classes Préparatoires PC-PT
Programme de Mathématiques

Table des matières

Première Année

1 Mathématiques I : Première Année Semestre 1

Le programme du premier semestre est conçu de façon à viser trois objectifs majeurs :
- assurer la progressivité du passage aux études supérieures, en tenant compte des programmes du lycée, dont il consolide et élargit les acquis ;
- consolider la formation des étudiants dans les domaines de la logique, du raisonnement et des techniques de calcul,qui sont des outils indispensables tant aux mathématiques qu'aux autres disciplines scientifiques ;
- présenter des notions nouvelles riches, de manière à susciter l'intérêt des étudiants.

Il est à noter que les différents points de vocabulaire, notations et raisonnement nécessaires aux étudiants pour la conception et la rédaction efficace d'une démonstration mathématique doivent être introduites **de manière progressive** en vue d'être acquises et maîtrisées en fin de premier semestre, et cela dans les deux disciplines : analyse et algèbre. Ces points sont les suivants :
- L'emploi des quantificateurs (sans que cela soit en guise d'abréviations) , implication, contraposition, équivalence, négation d'une proposition.
- Modes de raisonnement : par récurrence (faible et forte), par contraposition, par l'absurde, par analyse-synthèse.

Toute étude systématique de la logique ou de la théorie des ensembles est hors programme.
Le volume horaire proposé pour chaque chapitre est approximatif et concerne le temps alloué au cours intégré (cours, applications et exercices corrigés (T.D)).

Techniques fondamentales de calcul en analyse (20 H)

Le point de vue adopté dans ce chapitre est principalement pratique : il s'agit, en prenant appui sur les acquis du lycée, de mettre en oeuvre des techniques de l'analyse, en particulier celles de majoration. Les définitions précises et les constructions rigoureuses des notions de calcul différentiel ou intégral utilisées sont différées à un chapitre ultérieur. Cette appropriation en deux temps est destinée à faciliter les apprentissages.
Les objectifs de formation sont les suivants :
- une bonne maîtrise des automatismes et du vocabulaire de base relatifs aux inégalités ;
- l'introduction de fonctions pour établir des inégalités ;
- la manipulation des fonctions classiques dont le corpus est étendu ;
- le calcul de dérivées et de primitives ;
- la mise en pratique, sur des exemples simples, de l'intégration par parties et du changement de variable ;
- l'application des deux points précédents aux équations différentielles.

Les étudiants doivent connaître les principales techniques de calcul et savoir les mettre en pratique sur des cas simples. Le cours sur les équations différentielles est illustré par des exemples issus des autres disciplines scientifiques.

A-Fonctions de la variable réelle à valeurs réelles ou complexes

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
Inégalités dans $\mathbb{R}$	
Relation d'ordre sur $\mathbb{R}$. Compatibilité avec les opérations.	Exemples de majoration et de minoration de sommes, de produits et de quotients.
Intervalles de $\mathbb{R}$. Valeur absolue .Inégalité triangulaire.	Interprétation sur la droite réelle d'inégalités du type $\|x-a\| \leqslant b$.
Parties majorées, minorées, bornées. Majorant, minorant , maximum, minimum.	

Contenus	Capacités & Commentaires
Généralités sur les fonctions	
Ensemble de définition.	
Représentation graphique d'une fonction f à valeurs réelles.	Graphes des fonctions $x \mapsto f(x)+a$, $x \mapsto f(x+a)$, $x \mapsto f(a-x)$, $x \mapsto f(ax)$, $x \mapsto af(x)$. Résolution graphique d'équations et d'inéquations du type $f(x)=\lambda$ et $f(x) \geqslant \lambda$.
Parité, imparité, périodicité.	Interprétation géométrique de ces propriétés.
Somme, produit, composée.	
Monotonie (large et stricte).	
Bijectivité, réciproque d'une bijection.	Graphe d'une réciproque.
Fonctions majorées, minorées, bornées.	Traduction géométrique de ces propriétés. Une fonction f est bornée si et seulement si $\lvert f \rvert$ est majorée.
Dérivation	
Équation de la tangente en un point.	
Dérivée d'une combinaison linéaire, d'un produit, d'un quotient, d'une composée.	Ces résultats sont admis à ce stade. À ce stade, toute théorie sur les fonctions de plusieurs variables est hors programme.
Tableau de variation.	
Dérivée d'une réciproque.	Interprétation géométrique de la dérivabilité et du calcul de la dérivée d'une bijection réciproque.
Dérivées d'ordre supérieur.	
Étude d'une fonction	
Détermination des symétries et des périodicités afin de réduire le domaine d'étude, tableau de variations, asymptotes verticales et horizontales, tracé du graphe.	Application à la recherche d'extremums et à l'obtention d'inégalités.
Fonctions usuelles	
Étude des fonctions exponentielle, cosinus et sinus hyperboliques, logarithme népérien, puissances.	Dérivée, variation et graphe. Les fonctions puissances sont définies sur $\mathbb{R}_+^*$ et prolongées en 0 le cas échéant. Seules les fonctions puissances entières sont en outre définies sur $\mathbb{R}_-^*$.
Relations $(xy)^\alpha = x^\alpha y^\alpha$, $x^{\alpha+\beta} = x^\alpha x^\beta$, $(x^\alpha)^\beta = x^{\alpha\beta}$.	Notations ln et log_{10}.
Fonction logarithme décimal.	
Croissances comparées des fonctions logarithme, puissances et exponentielle.	
Fonctions sinus, cosinus, tangente.	
Fonctions circulaires réciproques.	Notations Arcsin, Arccos, Arctan. La fonction tangente hyperbolique et les fonctions hyperboliques réciproques sont hors programme.
Dérivation d'une fonction à valeurs complexes	
Dérivée d'une fonction à valeurs complexes.	La dérivée est définie par ses parties réelle et imaginaire.
Dérivée d'une combinaison linéaire, d'un produit, d'un quotient.	Brève extension des résultats sur les fonctions à valeurs réelles.
Dérivée de $\exp(\phi)$ où ϕ est une fonction dérivable à valeurs complexes.	

B-Primitives et équations différentielles linéaires

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
Calcul de primitives	
Primitives d'une fonction définie sur un intervalle à valeurs complexes.	Description de l'ensemble des primitives d'une fonction sur un intervalle connaissant l'une d'entre elles. Les étudiants doivent savoir utiliser les primitives de $x \mapsto e^{\lambda x}$ pour calculer celles de $x \mapsto e^{ax}\cos(bx)$ et $x \mapsto e^{ax}\sin(bx)$.
Primitives des fonctions puissances, cosinus, sinus, tangente, exponentielle, logarithme, $$x \mapsto \frac{1}{1+x^2},\ x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$	Les étudiants doivent savoir calculer les primitives de fonctions du type $$x \mapsto \frac{1}{ax^2+bx+c},$$ et reconnaître les dérivées de fonctions composées.
Dérivée de $x \mapsto \int_{x_0}^{x} f(t)\,dt$, où f est continue.	
Toute fonction continue sur un intervalle admet des primitives.	Résultat admis à ce stade.
Calcul d'une intégrale au moyen d'une primitive.	
Intégration par parties pour des fonctions de classe $\mathscr{C}^1$.	On définit à cette occasion la classe $\mathscr{C}^1$.
Changement de variable : si φ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur I et si f est continue sur $\varphi(I)$, alors pour tous a et b dans I $$\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)\,dx = \int_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt$$	Application au calcul de primitives.
Équations différentielles linéaires du premier ordre	
Notion d'équation différentielle linéaire du premier ordre : $$y' + a(x)y = b(x),$$ où a et b sont des fonctions continues définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ à valeurs réelles ou complexes.	Équation homogène associée. Cas particulier où la fonction a est constante.
Résolution d'une équation homogène. Forme des solutions : somme d'une solution particulière et de la solution générale de l'équation homogène. Principe de superposition. Méthode de la variation de la constante. Existence et unicité de la solution d'un problème de Cauchy.	
Équations différentielles linéaires du second ordre à coefficients constants	
Notion d'équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants : $$y'' + ay' + by = f(x)$$ où a et b sont des scalaires et f est une application continue à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.	Équation homogène associée.
Résolution de l'équation homogène.	Si a et b sont réels, description des solutions réelles.
Forme des solutions : somme d'une solution particulière et de la solution générale de l'équation homogène.	Les étudiants doivent savoir déterminer une solution particulière dans le cas d'un second membre de la forme $x \mapsto Ae^{\lambda x}$, avec $(A,\lambda) \in \mathbb{C}^2$, $x \mapsto B\cos(\omega x)$, $x \mapsto B\sin(\omega x)$ avec $(B,\omega) \in \mathbb{R}^2$.
Principe de superposition.	

Contenus	Capacités & commentaires
Existence et unicité de la solution d'un problème de Cauchy.	La démonstration de ce résultat est hors programme.

Nombres réels et suites numériques (15 H)

L'objectif est d'énoncer les propriétés fondamentales de la droite réelle, et de les appliquer à l'étude des suites, qui interviennent en mathématiques tant pour leur intérêt pratique (modélisation de phénomènes discrets) que théorique (approximation de nombres réels). On distingue les aspects qualitatifs (monotonie, convergence, divergence) des aspects quantitatifs (majoration, encadrement, vitesse de convergence ou de divergence).

Contenus	Capacités & commentaires
Ensembles de nombres usuels	
Entiers naturels, relatifs, nombres décimaux, rationnels.	
Droite réelle.	La construction de $\mathbb{R}$ est hors programme.
La relation d'ordre $\leq$ sur $\mathbb{R}$: majorant, minorant, maximum, minimum.	
Borne supérieure (resp. inférieure) d'une partie non vide majorée (resp. minorée) de $\mathbb{R}$.	
Partie entière.	Notation $[x]$.
Approximations décimales d'un réel.	Valeurs décimales approchées à la précision 10^{-n} par défaut et par excès.
Une partie X de $\mathbb{R}$ est un intervalle si et seulement si, pour tous a et b dans X , on a $[a,b] \subset X$.	
Généralités sur les suites réelles	
Modes de définition d'une suite.	De façon explicite, implicite ou par récurrence.
Monotonie. Suite majorée, minorée, bornée.	Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée si et seulement si $(\|u_n\|)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée. Exemples d'étude de la monotonie d'une suite définie par $u_{n+1} = f(u_n)$.
Suites stationnaires.	
Suites arithmétiques, suites géométriques.	Les étudiants doivent connaître une méthode de calcul du terme général d'une suite définie par $u_{n+1} = au_n + b$.
Suites récurrentes linéaires d'ordre deux.	La démonstration sera faite dans le cours d'algèbre linéaire.
Limite d'une suite réelle	
Limite finie ou infinie d'une suite.	Pour $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$, notation $u_n \to \ell$. Les définitions sont énoncées avec des inégalités larges. Lien avec la définition vue en classe de Terminale. Les étudiants doivent savoir démontrer l'existence d'une limite réelle en majorant $\|u_n - \ell\|$.
Unicité de la limite.	Notation $\lim\limits_{+\infty} u_n$.
Suite convergente, suite divergente. Toute suite réelle convergente est bornée. Opérations sur les limites : combinaison linéaire, produit, quotient. Stabilité des inégalités larges par passage à la limite.	
Théorèmes d'existence d'une limite	
Théorème de convergence par encadrement. Théorèmes de divergence par minoration ou majoration.	
Théorème de la limite monotone : toute suite monotone possède une limite.	Toute suite croissante majorée converge, toute suite croissante non majorée tend vers $+\infty$.

Contenus	Capacités & Commentaires
Théorème des suites adjacentes.	
Suites extraites	
Suites extraites d'une suite. Si une suite possède une limite (finie ou infinie), alors toutes ses suites extraites possèdent la même limite.	La notion de valeur d'adhérence est hors programme. Théorème de Bolzano-Weierstrass est hors programme. Utilisation des suites extraites pour montrer la divergence d'une suite.
Suites complexes	
Convergence d'une suite complexe. Suites complexes bornées ; toute suite complexe convergente est bornée. Opérations sur les suites convergentes : combinaisons linéaires, produit, quotient.	Traduction à l'aide des parties réelle et imaginaire.

Limites, continuité, dérivabilité (20 H)

Cette partie est divisée en deux chapitres, consacrés aux limites et à la continuité pour le premier, au calcul différentiel pour le second.
Dans de nombreuses questions de nature qualitative, on visualise une fonction par son graphe. Il convient de souligner cet aspect géométrique en ayant recours à de nombreuses figures.
Les fonctions sont définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ non vide et non réduit à un point et sont à valeurs réelles ou complexes.
Dans un souci d'unification, on dit qu'une propriété portant sur une fonction f définie sur I est vraie au voisinage de a si elle est vraie sur l'intersection de I avec un intervalle ouvert centré sur a si a est réel, avec un intervalle $[A, +\infty[$ si $a = +\infty$, avec un intervalle $]-\infty, A]$ si $a = -\infty$.

A- Limites-continuité

L'essentiel de cette partie consiste à adapter au cadre continu les notions déjà abordées pour les suites. Afin d'éviter des répétitions, l'enseignant a la liberté d'admettre certains résultats.
Pour la pratique du calcul de limites, on se borne à ce stade à des calculs très simples, en attendant de pouvoir disposer d'outils efficaces (développements limités).

Contenus	Capacités & commentaires
Limite d'une fonction en un point	
Étant donné un point a de $\overline{\mathbb{R}}$ appartenant à I ou extrémité de I, limite finie ou infinie d'une fonction en a.	Notations $f(x) \underset{x\to a}{\longmapsto} \ell$.
Limite finie ou infinie d'une fonction en $\pm\infty$.	Les définitions sont énoncées avec des inégalités larges.
Unicité de la limite.	Notations $f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} l$ et $\lim\limits_{x\to a} f(x)$.
Si f est définie en a et possède une limite en a, alors $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$. Si f possède une limite finie en a, f est bornée au voisinage de a.	
Limite à droite, limite à gauche.	Notations $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x>a}} f(x)$, $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)$. Extension de la notion de limite en a lorsque f est définie sur $I \setminus \{a\}$.
Opérations sur les fonctions admettant une limite finie ou infinie en a. Image d'une suite de limite a par une fonction admettant une limite en a.	Adaptation des énoncés relatifs aux suites.

Contenus	Capacités & Commentaires
Stabilité des inégalités larges par passage à la limite. Théorèmes d'encadrement (limite finie), de minoration (limite $+\infty$), de majoration (limite $-\infty$). Théorème de la limite monotone.	Démonstration non exigible.

Continuité en un point

Continuité de f en un point a de I.	La fonction f est continue en a si et seulement si elle admet une limite finie en a.
Continuité à droite et à gauche. Prolongement par continuité en un point.	Si a est une extrémité de I n'appartenant pas à I, f admet une limite finie en a si et seulement si elle est prolongeable par continuité en a.
Image d'une suite de limite a par une fonction continue en a.	Application aux suites définies par $u_{n+1} = f(u_n)$.
Opérations : combinaisons linéaires, produit, quotient, composition.	

Continuité sur un intervalle

Opérations : combinaisons linéaires, produit, quotient, composition.	
Théorème des valeurs intermédiaires.	La démonstration est hors programme.
Image d'un intervalle par une fonction continue.	
Une fonction continue sur un segment est bornée et atteint ses bornes.	La démonstration est hors programme.
Toute fonction f continue et strictement monotone sur un intervalle I réalise une bijection de I sur l'intervalle $f(I)$, et sa réciproque est continue et strictement monotone sur l'intervalle $f(I)$, et de même monotonie que f.	

Brève extension aux fonctions à valeurs complexes

Limite de f en a, continuité de f en a, continuité de f sur un intervalle I. Fonctions bornées au voisinage de a. Toute fonction admettant une limite finie en a est bornée au voisinage de a. Opérations sur les fonctions admettant une limite finie en a, continues en a ou continues sur un intervalle I : combinaisons linéaires, produit, quotient.	Traduction à l'aide des parties réelle et imaginaire.

B-Dérivabilité

Contenus	Capacités & commentaires
Nombre dérivé, fonction dérivée	
Dérivabilité en un point, nombre dérivé. Développement limité à l'ordre 1. La dérivabilité entraîne la continuité.	Interprétation géométrique. À ce stade, on peut écrire le reste sous la forme $(x-a)\varepsilon(x-a)$ et n'introduire la notation o que plus tard. Tangente au graphe de f au point d'abscisse a.
Dérivabilité à droite, à gauche. Dérivabilité d'une fonction sur un intervalle. Opérations sur les fonctions dérivables en un point, dérivables sur un intervalle : combinaison linéaire, produit, quotient, composée, réciproque.	
Propriétés des fonctions dérivables	
Extremum local. Condition nécessaire en un point intérieur.	Un point critique est un zéro de la dérivée.
Théorème de Rolle.	
Égalité des accroissements finis.	Interprétations géométrique.
Inégalité des accroissements finis : si f est dérivable et si $\lvert f'\rvert$ est majorée par k, alors f est k-lipschitzienne.	La notion de fonction lipschitzienne est introduite à cette occasion, elle n'appelle aucun développement supplémentaire. Application à l'étude des suites définies par une relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$.
Caractérisation des fonctions dérivables constantes, monotones, strictement monotones sur un intervalle.	
Théorème de la limite de la dérivée : si f est continue sur I, dérivable sur $I \setminus \{a\}$ et si $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x \neq a}} f'(x) = \ell \in \overline{\mathbb{R}}$, alors $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} = \ell$.	Interprétation géométrique. Si $\ell \in \mathbb{R}$, alors f est dérivable en a et f' est continue en a.
Fonctions de classe $\mathscr{C}^k$	
Pour $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, fonction de classe $\mathscr{C}^k$.	
Opérations sur les fonctions de classe $\mathscr{C}^k$: combinaison linéaire, produit (formule de Leibniz), quotient, composition, réciproque.	Les démonstrations relatives à la composition et à la réciproque ne sont pas exigibles.
Formule de Taylor-Lagrange.	
Fonctions complexes	
Brève extension des définitions et résultats précédents.	Caractérisation de la dérivabilité en termes de parties réelle et imaginaire.
Inégalité des accroissements finis pour une fonction de classe $\mathscr{C}^1$.	Le résultat, admis à ce stade, sera justifié dans le chapitre « Intégration ». Il convient de montrer par un contre-exemple que le théorème de Rolle ne s'étend pas.

Analyse asymptotique(15 H)

L'objectif de ce chapitre est de familiariser les étudiants avec les techniques asymptotiques de base, dans les cadres discret et continu. Les suites et les fonctions y sont à valeurs réelles ou complexes, le cas réel jouant un rôle prépondérant. On donne la priorité à la pratique d'exercices plutôt qu'à la vérification de propriétés élémentaires relatives aux relations de comparaison.
Les étudiants doivent connaître les développements limités usuels et savoir rapidement mener à bien des calculs asymptotiques simples. En revanche, les situations dont la gestion manuelle ne relèverait que de la technicité seront traitées à l'aide d'outils logiciels.

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
Relations de comparaison : cas des suites	
Relations de domination, de négligeabilité, d'équivalence.	Notations $u_n = O(v_n)$, $u_n = o(v_n)$, $u_n \sim v_n$. On caractérise ces relations à partir du quotient $\dfrac{u_n}{v_n}$ sous l'hypothèse que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne s'annule pas à partir d'un certain rang. Traduction à l'aide du symbole o des croissances comparées des suites de termes généraux $\ln^{\beta}(n), n^{\alpha}, e^{\gamma n}$.
Liens entre les relations de comparaison.	Équivalence des relations $u_n \sim v_n$ et $u_n - v_n = o(v_n)$.
Opérations sur les équivalents : produit, quotient, puissances.	
Propriétés conservées par équivalence : signe, limite.	
Relations de comparaison : cas des fonctions	
Adaptation aux fonctions des définitions et résultats précédents (en un point ou à l'infini).	
Développements limités	
Si f est définie sur l'intervalle I et si a est un point de I ou une extrémité de I, développement limité d'ordre n au voisinage de a.	Adaptation au cas où f est définie sur $I\backslash\{a\}$.
Unicité des coefficients, troncature d'un développement limité.	Développement limité en 0 d'une fonction paire, impaire.
Forme normalisée d'un développement limité : $$f(a+h) \underset{h\to 0}{=} h^p\left(a_0 + a_1 h + \ldots + a_n h^n + o(h^n)\right),$$ avec $a_0 \neq 0$.	Équivalence $f(a+h) \underset{h\to 0}{\sim} a_0 h^p$; signe de f au voisinage de a.
Opérations sur les développements limités : combinaison linéaire, produit, quotient.	Utilisation de la forme normalisée pour prévoir l'ordre d'un développement. Les étudiants doivent savoir déterminer sur des exemples simples le développement limité d'une composée, mais aucun résultat général n'est exigible. La division selon les puissances croissantes est hors programme.
Primitivation d'un développement limité.	
Formule de Taylor-Young : développement limité à l'ordre n en un point d'une fonction de classe $\mathscr{C}^n$.	La formule de Taylor-Young peut être admise à ce stade et justifiée dans le chapitre « Intégration ».
Développement limité à tout ordre en 0 de exp, sin, cos, $x \mapsto \ln(1+x)$, $x \mapsto (1+x)^{\alpha}$, Arctan, et de tan à l'ordre 3.	

Contenus	Capacités & Commentaires
Applications des développements limités	
Calcul d'équivalents et de limites. Étude locale d'une fonction : prolongement par continuité, dérivabilité d'un prolongement par continuité, tangente, position relative de la courbe et de la tangente, extremum. Détermination d'asymptotes.	

2 Mathématiques I : Première Année Semestre2

Le programme du deuxième semestre en analyse est organisé autour de deux objectifs :

– prolonger les chapitres d'analyse du premier semestre par l'étude de l'intégration sur un segment et des séries numériques, et achever ainsi la justification des résultats admis dans le chapitre « Techniques fondamentales de calcul en analyse » ;
– consolider les notions relatives aux probabilités sur un univers fini introduites au lycée et enrichir le corpus des connaissances sur les variables aléatoires définies sur un tel univers.

Intégration(20 H)

L'objectif majeur de ce chapitre est de définir l'intégrale d'une fonction continue par morceaux sur un segment à valeurs réelles ou complexes et d'en établir les propriétés élémentaires, notamment le lien entre intégration et primitivation. On achève ainsi la justification des propriétés présentées dans le chapitre « Techniques fondamentales de calcul en analyse ». Ce chapitre permet de consolider la pratique des techniques usuelles de calcul intégral. Il peut également offrir l'occasion de revenir sur l'étude des équations différentielles rencontrées au premier semestre.
La notion de continuité uniforme est introduite uniquement en vue de la construction de l'intégrale. L'étude systématique des fonctions uniformément continues est exclue.
Dans tout le chapitre, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
Fonctions continues par morceaux sur un segment	
Subdivision d'un segment. Fonctions en escalier définies sur un segment à valeurs réelles. Fonctions continues par morceaux sur un segment, sur un intervalle.	
Intégrale d'une fonction continue par morceaux sur un segment	
Intégrale d'une fonction f continue par morceaux sur un segment $[a,b]$ de $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$..	Aucune construction n'est imposée. Il convient d'interpréter graphiquement l'intégrale d'une fonction continue à valeurs dans $\mathbb{R}_+$ en terme d'aire mais tout développement théorique sur ce sujet est hors programme. Notations $\int_{[a,b]} f$, $\int_a^b f$, $\int_a^b f(t)dt$.
Linéarité, positivité et croissance de l'intégrale. Inégalité : $\left\|\int_{[a,b]} f\right\| \leqslant \int_{[a,b]} \|f\|$.	Les étudiants doivent savoir majorer et minorer des intégrales.
Relation de Chasles.	Extension de la notation $\int_a^b f(t)dt$ au cas où $b \leqslant a$. Propriétés correspondantes.
L'intégrale sur un segment d'une fonction continue de signe constant est nulle si et seulement si la fonction est nulle.	

Contenus	Capacités & Commentaires
Sommes de Riemann	
Si f est une fonction continue par morceaux sur le segment $[a,b]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$, alors : $$\frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(a+k\frac{b-a}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int_a^b f(t)\,dt.$$	Interprétation géométrique des sommes de Riemann. Démonstration dans le cas où f est de classe $\mathscr{C}^1$.
Calcul intégral	
Si f est une fonction continue sur l'intervalle I et si x_0 est un point de I, alors $x \mapsto \int_a^x f(t)\,dt$ est l'unique primitive de f s'annulant en x_0. Toute fonction continue sur un intervalle possède des primitives. Calcul d'une intégrale au moyen d'une primitive. Intégration par parties. Changement de variable.	Pour f de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[a,b]$: $$\int_a^b f'(t) = f(b)-f(a).$$ Application au calcul de primitives. Tout excès de technicité est exclu. Les méthodes d'intégration des fractions rationnelles en cosinus ou sinus, celles des racines de fonctions homographiques ou de polynômes du second degré sont hors programme.
Formule de Taylor avec reste intégrale	
Pour une fonction f de classe $\mathscr{C}^{n+1}$, formule de Taylor avec reste intégral au point a à l'ordre n. Inégalité de Taylor-Lagrange.	
Brève extension au cas des fonctions à valeurs complexes	
Intégrale d'une fonction continue sur un segment. Linéarité, majoration du module de l'intégrale, intégration par parties et changement de variable, formule de Taylor avec reste intégral, Inégalité de Taylor-Lagrange.	Définition au moyen des parties réelle et imaginaire.

Séries numériques(15 H)

L'étude des séries prolonge celle des suites. Elle permet d'illustrer le chapitre « Analyse asymptotique » et, à travers la notion de développement décimal de mieux appréhender les nombres réels.
L'objectif majeur est la maîtrise de la convergence absolue ; tout excès de technicité est exclu.

Contenus	Capacités & commentaires
Généralités	
Série à terme réel ou complexe, sommes partielles, convergence, divergence. Somme et restes d'une série convergente.	La série est notée $\sum_{n\geq 0} u_n$. En cas de convergence, sa somme est notée $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$.
Linéarité de la somme.	
Le terme général d'une série convergente tend vers 0.	Divergence grossière.
Séries géométriques : condition nécessaire et suffisante de convergence, somme. Lien suite-série : Une suite (u_n) est convergente si et seulement si la série $\sum_{n\geq 0}(u_{n+1}-u_n)$ est convergente.	

Contenus	Capacités & Commentaires
Séries à termes positifs	
Une série à termes positifs converge si et seulement si la suite de ses sommes partielles est majorée.	
Si $0 \leqslant u_n \leqslant v_n$ pour tout n, la convergence de $\sum v_n$ implique celle de $\sum\limits_{n\geq 0} u_n$.	Adaptation au cas où l'inégalité $u_n \leq v_n$ n'est vérifiée qu'à partir d'un certain rang.
Séries de Riemann.	Comparaison à une série géométrique, à une série de Riemann.
Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont positives et si $u_n \sim v_n$, alors la convergence de la série $\sum\limits_{n\geq 0} u_n$ est équivalente à celle $\sum\limits_{n\geq 0} v_n$.	
Si f est monotone, encadrement des sommes partielles de $\sum\limits_{n\geq 0} f(n)$ à l'aide de la méthode des rectangles. .	Application à l'étude de sommes partielles et de restes.
Séries absolument convergentes	
Convergence absolue.	
La convergence absolue implique la convergence.	Le critère de Cauchy et la notion de semi-convergence sont hors programme. La convergence de la série absolument convergente $\sum\limits_{n\geq 0} u_n$ est établie à partir de celles de $\sum\limits_{n\geq 0} u_n^+$ et $\sum\limits_{n\geq 0} {u_n}^-$.
Inégalité triangulaire pour la somme d'une série absolument convergente.	
Si (u_n) est une suite complexe, si (v_n) est une suite d'éléments de $\mathbb{R}_+$, si $u_n = O(v_n)$ et si $\sum\limits_{n\geq 0} v_n$ converge, alors $\sum\limits_{n\geq 0} u_n$ est absolument convergente donc convergente.	
Représentation décimale des réels	
Existence et unicité du développement décimal propre d'un réel de $[0,1[$.	La démonstration n'est pas exigible. On indique la caractérisation des nombres rationnels par la périodicité de leur développement décimal à partir d'un certain rang.

Dénombrement(10 H)

Ce chapitre est introduit essentiellement en vue de son utilisation en probabilités; rattaché aux mathématiques discrètes, le dénombrement interagit également avec l'algèbre et l'informatique. Il permet de modéliser certaines situations combinatoires et offre un nouveau cadre à la représentation de certaines égalités.

Toute formalisation excessive est exclue. En particulier :

- parmi les propriétés du premier paragraphe , les plus intuitives sont admises sans démonstration;
- l'utilisation systématique de bijections dans les problèmes de dénombrement n'est pas un attendu du programme.

Contenus	Capacités & commentaires
Cardinal d'un ensemble fini	
Cardinal d'un ensemble fini.	Notations $\lvert A\rvert$, $\mathrm{Card}(A)$. Tout fondement théorique des notions d'entier naturel et de cardinal est hors programme.
Cardinal d'une partie d'un ensemble fini, cas d'égalité. Une application entre deux ensembles finis de même cardinal est bijective si et seulement si elle est injective, si et seulement si elle est surjective.	

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
Cardinal de la réunion (disjointe ou quelconque) de deux ensembles finis. Cardinal de l'ensemble des applications d'un ensemble fini dans un ensemble fini. Cardinal de l'ensemble des parties d'un ensemble fini.	La formule du crible est hors programme.
Listes et combinaisons	
Nombre de p-listes (ou p-uplets) d'éléments distincts d'un ensemble de cardinal n, nombre d'applications injectives d'un ensemble de cardinal p dans un ensemble de cardinal n, nombre de permutations d'un ensemble de cardinal n. Nombre de parties à p éléments (ou p-combinaisons) d'un ensemble de cardinal n.	Démonstration combinatoire des formules de Pascal et du binôme.

Probabilités(25 H)

Ce chapitre a pour objectif de consolider les connaissances relatives aux probabilités sur un univers fini et aux variables aléatoires définies sur un tel univers présentées dans les classes antérieures. Il s'appuie sur le chapitre consacré au dénombrement.
Ce chapitre a vocation à interagir avec l'ensemble du programme. Il se prête également à des activités de modélisation de situations issues de la vie courante ou d'autres disciplines.

A-Généralités

Les definitions sont motivées par la notion d'experience aléatoire. La modélisation de situations aléatoires simples fait partie des capacités attendues des étudiants. On se limite au cas ou les événements sont les parties de Ω.

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
Expérience aléatoire et univers	
L'ensemble des issues (ou résultats possibles ou réalisations) d'une expérience aléatoire est appelé univers. Événement, événement élémentaire (singleton), événement contraire, événement «A et B», événement «A ou B», événement impossible, événements incompatibles, système complet d'événements.	On se limite au cas où cet univers est fini.
Espaces probabilisés finis	
Une probabilité sur un univers fini Ω est une application P de $\mathscr{P}(\Omega)$ dans $[0,1]$ telle que $P(\Omega)=1$ et, pour toutes parties disjointes A et B , $P(A\cup B)=P(A)+P(B)$. Détermination d'une probabilité par les images des singletons. Équiprobabilité ou probabilité uniforme. Propriétés des probabilités :probabilité de la réunion de deux événements, probabilité de l'événement contraire, croissance.	Un espace probabilisé fini est un couple (Ω, P) où Ω est un univers fini et P une probabilité sur Ω.

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
Probabilités conditionnelles	
Si $P(B)>0$, la probabilité conditionnelle de A sachant B est définie par : $$P(A\backslash B)=P_B(A)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}.$$	On justifiera cette définition par une approche heuristique fréquentiste.
Formule des probabilités composées. Formule des probabilités totales. Formules de Bayes : 1. si A et B sont deux événements tels que $P(A)>0$ et $P(B)>0$, alors : $$P(A\backslash B)=\frac{P(B\backslash A)P(A)}{P(B)}$$ 2. si $(A_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ est un système complet d'événements de probabilités non nulles et si B est un événement de probabilité non nulle, alors : $$P(A_j\backslash B)=\frac{P(B\backslash A_j)P(A_j)}{\sum\limits_{i=1}^{n}P(B\backslash A_i)P(A_i)}$$	On donnera plusieurs applications issues de la vie courante.
Événements indépendants	
Couple d'événements indépendants.	Si $P(B)>0$, l'indépendance de A et B s'écrit $P(A\backslash B)=P(A)$.
Famille finie d'événements mutuellement indépendants.	L'indépendance deux à deux des événements $A_1,\dots,A_n$ n'implique pas l'indépendance mutuelle si $n\geqslant 3$.

B-Variables aléatoires sur un univers fini

L'utilisation de variables aléatoires pour modéliser des situations aléatoires simples fait partie des capacités attendues des étudiants.

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
Variables aléatoires	
Une variable aléatoire est une application définie sur l'univers Ω à valeurs dans un ensemble E. Lorsque $E\subset\mathbb{R}$, la variable aléatoire est dite réelle. Loi P_X de la variable aléatoire X.	Si X est une variable aléatoire et si A est une partie de E, notation $X\in A$ ou $(X\in A)$ pour l'événement $X^{-1}(A)$. Notations $P(X\in A), P(X=x), P(X\leqslant x)$. L'application P_X est définie par la donnée des $P(X=x)$ pour x dans $X(\Omega)$.
Image d'une variable aléatoire par une fonction, loi associée.	
Lois usuelles	
	La reconnaissance de situations modélisées par les lois classiques de ce paragraphe est une capacité attendue des étudiants.
Loi uniforme. Loi de Bernoulli de paramètre $p\in[0,1]$.	Notation $\mathscr{B}(p)$. Interprétation : succès d'une expérience. Lien entre variable aléatoire de Bernoulli et indicatrice d'un événement.

Contenus	Capacités & Commentaires
Loi binomiale de paramètres $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in [0,1]$.	Notation $\mathscr{B}(n,p)$. Interprétation : nombre de succès lors de la répétition de n expériences de Bernoulli indépendantes, ou tirages avec remise dans un modèle d'urnes.

Couples de variables aléatoires

Couple de variables aléatoires. Loi conjointe, lois marginales d'un couple de variables aléatoires.	La loi conjointe de X et Y est la loi de (X,Y), les lois marginales de (X,Y) sont les lois de X et de Y. Les lois marginales ne déterminent pas la loi conjointe.
Loi conditionnelle de Y sachant $(X = x)$.	

Variables aléatoires indépendantes

Couple de variables aléatoires indépendantes. Si X et Y sont indépendantes : $$P\big((X,Y) \in A \times B\big) = P(X \in A)P(X \in B).$$	
Variables aléatoires mutuellement indépendantes.	Modélisation de n expériences aléatoires indépendantes par une suite finie $(X_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ de variables aléatoires indépendantes.
Si $X_1, \dots, X_n$ sont des variables aléatoires mutuellement indépendantes, alors quel que soit $(A_1, \dots, A_n) \in \prod_{i=1}^{n} \mathscr{P}(X_i(\Omega))$, les événements $(X_i \in A_i)$ sont mutuellement indépendants.	Démonstration non exigible.
Si $X_1, \dots, X_n$ sont mutuellement indépendantes de loi $\mathscr{B}(p)$, alors $X_1 + \dots + X_n$ suit la loi $\mathscr{B}(n,p)$.	La démonstration de ce résultat n'est pas exigible.
Si X et Y sont deux variables aléatoires indépendantes, et si f et g sont des applications définies respectivement sur $X(\Omega)$ et $Y(\Omega)$ alors les variables aléatoires $f(X)$ et $g(Y)$ sont aussi indépendantes.	

Espérance

Espérance d'une variable aléatoire réelle.	Interprétation en terme de moyenne pondérée. Une variable aléatoire centrée est une variable aléatoire d'espérance nulle.
Relation : $E(X) = \sum_{\omega \in \Omega} P\big(\{\omega\}\big)\, X(\omega)$. Espérance d'une variable aléatoire réelle constante, de l'indicatrice d'une partie Ω, d'une variable aléatoire suivant l'une des lois uniforme, de Bernoulli, binomiale. Propriétés de l'espérance : linéarité, positivité, croissance.	
Formule de transfert : Si X est une variable aléatoire définie sur Ω à valeurs dans E et f une fonction définie sur $X(\Omega)$ à valeurs dans $\mathbb{R}$, alors $$E\big(f(X)\big) = \sum_{x \in X(\Omega)} P(X = x) f(x).$$	Application au calcul de l'espérance d'une variable aléatoire suivant la loi $\mathscr{B}(n,p)$. L'espérance de $f(X)$ est déterminée par la loi de X.
Si X et Y sont indépendantes : $E(XY) = E(X)E(Y)$.	La réciproque est fausse en général.

Variance et écart type

Variance, écart type.	La variance et l'écart type sont des indicateurs de dispersion.
Relation $V(X) = E(X^2) - E(X)^2$.	

Contenus	Capacités & Commentaires
Relation $V(aX+b)=a^2V(X)$. Variance d’une variable aléatoire de Bernoulli, d’une variable aléatoire binomiale. Inégalité de Bienaymé-Tchebychev.	

3 Mathématiques II : Première Année Semestre 1

Le programme du premier semestre est conçu de façon à viser trois objectifs majeurs :
- assurer la progressivité du passage aux études supérieures, en tenant compte des programmes du lycée, dont il consolide et élargit les acquis ;
- consolider la formation des étudiants dans les domaines de la logique, du raisonnement et des techniques de calcul,qui sont des outils indispensables tant aux mathématiques qu'aux autres disciplines scientifiques ;
- présenter des nouvelles notions riches, de manière à susciter l'intérêt des étudiants.

Il est à noter que les différents points de vocabulaire, notations et raisonnement nécessaires aux étudiants pour la conception et la rédaction efficace d'une démonstration mathématique doivent être introduites **de manière progressive** en vue d'être acquises et maîtrisées en fin de premier semestre, et cela dans les deux disciplines : analyse et algèbre. Ces points sont les suivants :
- L'emploi des quantificateurs (sans que cela soit en guise d'abréviations) , implication, contraposition, équivalence, négation d'une proposition.
- Modes de raisonnement : par récurrence (faible et forte), par contraposition, par l'absurde, par analyse-synthèse.

Toute étude systématique de la logique ou de la théorie des ensembles est hors programme.
Le volume horaire proposé pour chaque chapitre est approximatif et concerne le temps alloué au cours intégré (cours, applications et exercices corrigés (T.D)).

Nombres complexes,trigonométrie et calcul algébrique(12 H)

L'objectif de ce chapitre est de consolider et d'approfondir les notions sur les nombres complexes acquises au secondaire. Le programme combine les aspects suivants :
- l'étude algébrique du corps $\mathbb{C}$, équations algébriques (équations du second degré, racines n-ièmes d'un nombre complexe) ;
- l'interprétation géométrique des nombres complexes et l'utilisation des nombres complexes en géométrie plane ;
- l'exponentielle complexe et ses applications à la trigonométrie.

Il est recommandé d'illustrer le cours par de nombreuses figures.

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
Nombres complexes	
Parties réelle et imaginaire. Opérations sur les nombres complexes. Conjugaison, compatibilité avec les opérations.	La construction de $\mathbb{C}$ n'est pas exigible.
Point du plan associé à un nombre complexe, affixe d'un point, affixe d'un vecteur.	On identifie $\mathbb{C}$ au plan usuel muni d'un repère orthonormé direct.
Module	
Module. Relation $\|z\|^2 = z\overline{z}$, module d'un produit, d'un quotient. Inégalité triangulaire, cas d'égalité.	Interprétation géométrique de $\|z - z'\|$, cercles et disques.

Contenus	Capacités & Commentaires

Nombres complexes de module 1 et trigonométrie

Cercle trigonométrique. Paramétrisation par les fonctions circulaires.	Notation $\mathbb{U}$. Les étudiants doivent savoir retrouver les formules du type $\cos(\pi - x) = -\cos x$ et résoudre des équations et inéquations trigonométriques en s'aidant du cercle trigonométrique.
Définition de $e^{\mathrm{i}t}$ pour $t \in \mathbb{R}$. Si t et t' sont deux réels, alors $e^{\mathrm{i}(t+t')} = e^{\mathrm{i}t}e^{\mathrm{i}t'}$.	Factorisation de $1 \pm e^{\mathrm{i}t}$. Les étudiants doivent savoir factoriser des expressions du type $\cos(p) + \cos(q)$.
Formules de trigonométrie exigibles : $\cos(a\pm b)$,$\sin(a\pm b)$, $\cos(2a)$, $\sin(2a)$, $\cos a \cdot \cos b$, $\sin a \cdot \cos b$, $\sin a \cdot \sin b$.	
Fonction tangente.	Notation tan.
Formule $\tan(a \pm b)$.	
Formules d'Euler.	Linéarisation, calcul de $\sum_{k=0}^{n} \cos(kt)$ et de $\sum_{k=0}^{n} \sin(kt)$.
Formule de Moivre.	

Arguments d'un nombre complexe non nul

Écriture d'un nombre complexe non nul sous la forme $re^{\mathrm{i}\theta}$ avec $r > 0$ et $\theta \in \mathbb{R}$. Relation de congruence modulo 2π sur $\mathbb{R}$. Arguments d'un nombre complexe non nul. Arguments d'un produit, d'un quotient. Transformation de $a\cos t + b\sin t$ en $A\cos(t - \varphi)$.	

Équations du second degré

Racines carrées d'un nombre complexe. Résolution des équations du second degré, discriminant. Somme et produit des racines d'une équation du second degré.	

Racines n-ièmes

Description des racines n-ièmes de l'unité. Équation $z^n = a$.	Notation $\mathbb{U}_n$. Représentation géométriques des solutions.

Exponentielle complexe

Définition de e^z pour z complexe : $e^z = \mathrm{e}^{\mathrm{Re}(z)}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\mathrm{Im}(z)}$.	Notations $\exp(z), \mathrm{e}^z$. PC et SI : définition d'une impédance complexe en régime sinusoïdal.
Exponentielle d'une somme. Pour tous z et z' dans $\mathbb{C}$, $\exp(z) = \exp(z')$ si et seulement si $z - z' \in 2\mathrm{i}\pi\mathbb{Z}$.	

Interprétation géométrique des nombres complexes

Traduction de l'alignement et de l'orthogonalité au moyen d'affixes. Transformation $z \longmapsto ze^{i\theta}$: rotation plane de centre O et d'angle θ. Transformation $z \longmapsto z + b$: interprétation en termes de translation. Transformation $z \longmapsto kz$: interprétation en termes d'homothétie. Transformation $z \longmapsto \overline{z}$: interprétation en termes de symétrie centrale.	

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
Calcul algébrique : Sommes et produits	
Somme et produit d'une famille finie de nombres complexes.	Notations $\sum_{i=1}^{n} a_i, \sum_{i\in I} a_i, \prod_{i=1}^{n} a_i , \sum_{i\in I} a_i$. Sommes et produits télescopiques, exemples de changements d'indices et de regroupements de termes.
Somme d'une progression arithmétique ou géométrique finie de nombres complexes. Factorisation de $a^n - b^n$ pour $n \in \mathbb{N}^*$. Sommes doubles. Produit de deux sommes finies. Sommes triangulaires.	
Calcul algébrique : Coefficients binômiaux et formule du binôme	
Factorielle. Coefficients binômiaux.	Notations $\binom{n}{p}$ et C_n^p.
Relation $\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}$. Formule et triangle de Pascal. Formule du binôme dans $\mathbb{C}$.	

Rudiments d'arithmétique dans $\mathbb{Z}$ (8 H)

Ce chapitre a pour objectif de consolider la connaissance des nombres entiers relatifs et de mettre en oeuvre des algorithmes élémentaires. L'ensemble $\mathbb{Z}$ est supposé connu. Toute axiomatique de $\mathbb{Z}$ est hors programme.

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
Multiples et diviseurs d'un entier relatif . Division euclidienne dans $\mathbb{Z}$. PGCD de deux entiers relatifs non tout deux nuls. PPCM. Définition d'un nombre premier. Existence et unicité de la décomposition d'un entier supérieur ou égal à 2 en produit de facteurs premiers.	Les démonstrations de l'existence et de l'unicité sont hors programme.

Vocabulaire ensembliste (10 H)

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
Ensembles	
Ensemble, appartenance, inclusion. Sous-ensemble (ou partie),ensemble vide.	
Opérations sur les parties d'un ensemble : réunion, intersection, différence, passage au complémentaire.	Notations $E \setminus A$, $\overline{A}$ et $\complement_E^A$ pour le complémentaire.
Produit cartésien de deux ensembles, d'un nombre fini d'ensembles.	
Ensemble des parties d'un ensemble.	Notation $\mathscr{P}(E)$.
Applications et relations d'équivalence	
Application d'un ensemble dans un ensemble. Graphe d'une application.	Une application de E dans F associe à tout élément de E un unique élément de F. Notation $\mathscr{F}(E,F)$ et F^E pour l'ensemble des applications de E dans F . Le programme ne distingue pas les notions de fonction et d'application.
Famille d'éléments d'un ensemble E indexée par un ensemble fini.	
Fonction indicatrice d'une partie d'un ensemble.	Notation $\mathbb{1}_A$.
Restriction.	Notation $f\|_A$.
Image directe.	Notation $f(A)$.
Image réciproque.	Notation $f^{-1}(B)$.
Composition.	
Injection, surjection. Composée de deux injections, de deux surjections.	
Bijection, réciproque. Composée de deux bijections, réciproque de la composée.	
Relation d'équivalence, classes d'équivalence.	
Exemple : relation de congruence dans $\mathbb{Z}$	La notion d'ensemble quotient est hors programme.

Systèmes linéaires et calcul matriciel (23 H)

Ce chapitre est à concevoir comme une initiation aux structures algébriques et une préparation à l'algèbre linéaire " abstraite " qui sera étudiée au second semestre.
La problématique de départ est la résolution des systèmes linéaires. Elle est à la fois familière des étudiants - ils l'ont pratiquée dans l'enseignement secondaire pour de petites dimensions, par exemple en géométrie - et motivante par le nombre important de problèmes se ramenant à la résolution d'un système linéaire (méthode des différences finies, méthode des moindres carrés, etc). L'objectif majeur du sous-chapitre -Systèmes linéaires- est la justification et la mise en oeuvre de l'algorithme de Gauss-Jordan de résolution d'un système linéaire.
La recherche d'une méthode systématique de résolution d'un système linéaire par cet algorithme conduit naturellement au calcul matriciel qui recèle à la fois des propriétés inhabituelles pour les étudiants (existence de diviseurs de 0, non commutativité) et des propriétés analogues à celles des ensembles de nombres (distributivité, etc.) qu'il convient de mettre en évidence.
L'ordre d'exposition choisi ci-dessous n'est nullement impératif. On pourra aussi bien commencer par introduire le calcul matriciel puis l'appliquer à la théorie des systèmes linéaires. On veillera à respecter les objectifs de formation suivants :
- Familiariser les étudiants avec les différentes représentations des solutions d'un système linéaire.
- Entraîner au calcul matriciel. On évitera cependant tout excès de technicité et on se limitera à des systèmes et des matrices de taille raisonnable dans les applications numériques.

Dans ce chapitre, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, et n et p appartiennent à $\mathbb{N}$.

A-Systèmes linéaires

Contenus	Capacités & commentaires
Généralités sur les systèmes linéaires	
Équation linéaire à p inconnues. Système linéaire de n équations à p inconnues à coefficients dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.	Interprétations géométriques : représentation d'une droite, d'un plan.
Système homogène associé à un système linéaire.	
Matrice A d'un système linéaire.	On introduit les matrices comme tableaux rectangulaires d'éléments de K.
Opérations élémentaires : échange des lignes L_i et L_j, ajout de λL_j à L_i pour $i \neq j$ et multiplication de L_i par $\lambda \neq 0$.	Notations $L_i \leftrightarrow L_j$, $L_i \leftarrow \lambda L_i$ $(\lambda \neq 0)$, $L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$.
Deux systèmes sont dits équivalents si on peut passer de l'un à l'autre par une suite finie d'opérations élémentaires sur les lignes.	Notation $A \underset{L}{\sim} A'$
Deux systèmes équivalents ont le même ensemble de solutions.	
Deux matrices sont dites équivalentes par lignes si elles se déduisent l'une de l'autre par une suite finie d'opérations élémentaires sur les lignes.	
Si l'on passe d'un système S à un autre système S' par une suite finie d'opérations élémentaires sur les lignes, la matrice augmentée de S' s'obtient en effectuant la même suite d'opérations élémentaires sur la matrice augmentée de S.	Ce résultat justifie la présentation matricielle de la résolution d'un système linéaire.
Échelonnement et algorithme du pivot de Gauss-Jordan	
Une matrice est dite échelonnée par lignes si elle vérifie les deux propriétés suivantes : – Si une ligne est nulle, toutes les lignes suivantes le sont aussi, – À partir de la deuxième ligne, dans chaque ligne non nulle, le premier coefficient non nul à partir de la gauche est situé à droite du premier coefficient non nul de la ligne précédente.	Un schéma "en escalier" illustre la notion de matrice échelonnée.
On appelle pivot le premier coefficient non nul de chaque ligne non nulle. Une matrice échelonnée en lignes est dite échelonnée réduite par lignes si elle est nulle ou si tous ses pivots sont égaux à 1 et sont les seuls éléments non nuls de leur colonne.	
Toute matrice est équivalente par lignes à une unique matrice échelonnée réduite par lignes.	La démonstration de l'unicité n'est pas exigible. Pour des systèmes de taille $n > 3$ ou $p > 3$, on utilise l'outil informatique. On met en évidence sur un exemple l'instabilité numérique de la méthode due aux erreurs d'arrondis.
Ensemble des solutions d'un système linéaire	
Inconnues principales, inconnues secondaires ou paramètres.	Application aux problèmes d'intersection en géométrie du plan et de l'espace.
Système incompatible. Système compatible.	
Rang d'un système linéaire.	Le rang est défini comme nombre de pivots de la réduite échelonnée par lignes de la matrice du système homogène associé.
Le nombre de paramètres est égal à la différence du nombre d'inconnues et du rang.	
Expression des solutions d'un système linéaire.	Description des solutions au moyen d'une solution particulière et des solutions du système homogène associé.

B-Calcul matriciel

Contenus	Capacités & commentaires
Ensembles de matrices	
Ensemble $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ des matrices à n lignes et p colonnes à coefficients dans $\mathbb{K}$.	
Opérations sur les matrices : combinaison linéaire, multiplication matricielle.	Si X est une matrice colonne, AX est une combinaison linéaire des colonnes de A. La j -ème colonne de AB est le produit de A par la j -ème colonne de B et la i -ème ligne de AB est le produit de la i -ème ligne de A par B.
Application à l'écriture matricielle d'un système linéaire.	
Propriétés des opérations matricielles.	Il existe des matrices non nulles dont le produit est nul.
Ensemble $\mathcal{M}_n(K)$.	Notation I_n pour la matrice identité.
Puissances d'une matrice carrée.	Le produit matriciel n'est pas commutatif.
Formule du binôme.	
Matrices diagonales, triangulaires.	Stabilité par les opérations.
Opérations élémentaires de pivot et calcul matriciel	
Matrices élémentaires : matrices de transvection, de transposition et de dilatation.	Interprétation des opérations élémentaires sur les lignes d'une matrice au moyen des matrices élémentaires.
Inversibilité des matrices élémentaires.	
Traduction matricielle de l'algorithme de Gauss-Jordan : pour toute matrice rectangulaire A à coefficients dans $\mathbb{K}$, il existe une matrice E produit de matrices élémentaires et une unique matrice échelonnée réduite R telles que $A = ER$.	
Brève extension des définitions et des résultats aux opérations élémentaires sur les colonnes d'une matrice.	Notation $A \underset{C}{\sim} A'$.
Matrices carrées inversibles	
Matrices carrées inversibles. Inverse.	On introduit la terminologie "groupe linéaire", et la notation $GL_n(\mathbb{K})$, pour désigner l'ensemble des matrices inversibles de taille n, mais tout développement sur la notion de groupe est hors programme.
Inverse d'un produit de matrices inversibles.	
Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, équivalence des propriétés suivantes : – A est inversible ; – $A \underset{L}{\sim} I_n$; – Le système $AX = 0$ n'admet que la solution nulle ; – Pour tout B , le système $AX = B$ admet une unique solution ; – Pour tout B , le système $AX = B$ admet au moins une solution.	
Calcul de l'inverse d'une matrice carrée par résolution d'un système linéaire et par la méthode du pivot de Gauss-Jordan.	
Transposition	
Transposée d'une matrice.	Notation ${}^tA$.
Transposée d'une somme, d'un produit, d'un inverse.	Matrices symétriques et antisymétriques.

Polynômes et fractions rationnelles (20 H)

L'objectif de ce chapitre est d'étudier les propriétés de base des objets formels (polynômes) et de les exploiter pour la résolution de problèmes portant sur les équations algébriques et les fonctions numériques.

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
L'ensemble $\mathbb{K}[X]$	
L'ensemble $\mathbb{K}[X]$. Opérations : somme, produit, composée. Degré, coefficient dominant, polynôme unitaire. Degré d'une somme, d'un produit. Fonction polynômiale associée à un polynôme.	La construction n'est pas exigible. Par convention, le degré du polynôme nul est $-\infty$. Ensemble $\mathbb{K}_n[X]$ des polynômes de degré au plus n.
Divisibilité et division euclidienne dans $\mathbb{K}[X]$	
Divisibilité dans $\mathbb{K}[X]$, diviseurs et multiples. Division euclidienne d'un élément A de $\mathbb{K}[X]$ par un élément B de $\mathbb{K}[X]\setminus\{0\}$.	
Dérivation dans $\mathbb{K}[X]$	
Dérivée formelle d'un polynôme. Opérations sur les polynômes dérivés : combinaison linéaire, produit. Formule de Taylor polynômiale.	Pour $\mathbb{K}=\mathbb{R}$, lien avec la dérivée de la fonction polynômiale associée.
Racines	
Racines (ou zéros) d'un polynôme. Caractérisation par la divisibilité. Le nombre de racines d'un polynôme P non nul est majoré par le degré de P. Multiplicité d'une racine. Caractérisation par les dérivées successives. Polynôme scindé sur $\mathbb{K}$. Expressions de la somme et du produit des racines d'un polynôme en fonction de ses coefficients. Cas des polynômes du second degré.	Les autres fonctions symétriques élémentaires sont hors programme. Calcul de deux nombres connaissant leur somme et leur produit.
Décomposition en facteurs irréductibles de $\mathbb{C}[X]$ et $\mathbb{R}[X]$	
Théorème de d'Alembert-Gauss. Polynômes irréductibles de $\mathbb{C}[X]$. Théorème de décomposition en facteurs irréductibles dans $\mathbb{C}[X]$. Polynômes irréductibles de $\mathbb{R}[X]$. Théorème de décomposition en facteurs irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$.	La démonstration du théorème de d'Alembert-Gauss est hors programme.
Fractions rationnelles	
Définition d'une fraction rationnelle, forme irréductible partie entière, pôle et multiplicité. Exemples de décomposition en éléments simples sur $\mathbb{C}$ et sur $\mathbb{R}$.	Le théorème de la décomposition en éléments simples, dans sa forme générale, est hors programme. On limitera la technicité des exercices.

4 Mathématiques II : Première Année Semestre 2

Le programme du deuxième semestre en algèbre a pour objectif d'introduire les notions fondamentales relatives à l'algèbre linéaire et aux espaces préhilbertiens.
Dans tout le cours d'algèbre linéaire, le corps $\mathbb{K}$ est égal à $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.
Le programme d'algèbre linéaire est divisé en deux chapitres d'importance comparable, intitulés « Algèbre linéaire I » et « Algèbre linéaire II ». Le premier privilégie les objets géométriques : espaces, sous-espaces, applications linéaires. Le second est consacré aux matrices. Cette séparation est une commodité de rédaction. L'enseignant a la liberté d'organiser l'enseignement de l'algèbre linéaire de la manière qu'il estime la mieux adaptée.

Espaces vectoriels et applications linéaires (40 H)

Les objectifs du chapitre « Espaces vectoriels et applications linéaires » sont les suivants :
- acquérir les notions de base relatives aux espaces vectoriels et à l'indépendance linéaire ;
- reconnaître les problèmes linéaires et les modéliser à l'aide des notions d'espace vectoriel et d'application linéaire ;
- définir la notion de dimension, qui interprète le nombre de degrés de liberté d'un problème linéaire ; il convient d'insister sur les méthodes de calcul de dimension, de faire apparaître que ces méthodes reposent sur deux types de représentations : paramétrisation linéaire d'un sous-espace, description d'un sous-espace par équations linéaires ;
- présenter un certain nombre de notions de géométrie affine, de manière à consolider et enrichir les acquis relatifs à la partie affine de la géométrie classique du plan et de l'espace.

Il convient de souligner, à l'aide de nombreuses figures, comment l'intuition géométrique permet d'interpréter en petite dimension les notions de l'algèbre linéaire, ce qui facilite leur extension à la dimension quelconque.

A-Espaces vectoriels

Contenus	Capacités & commentaires
Espaces et sous espaces vectoriels	
Structure de $\mathbb{K}$ espace vectoriel. Espaces $\mathbb{K}^n$, $\mathbb{K}[X]$.	On pourra introduire la notion d'espace vectoriel sur des exemples simples : $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$, $\mathbb{R}_2[X]$, $\mathbb{R}_3[X]$; $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. .
Espace vectoriel des fonctions d'un ensemble dans un espace vectoriel.	Espace $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ des suites d'éléments de $\mathbb{K}$.
Combinaisons linéaires d'un nombre fini de vecteurs.	
Sous-espaces d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, caractérisation.	Exemples : ensemble des solutions d'un système linéaire homogène ou d'une équation différentielle linéaire homogène.
Sous-espace engendré par une famille finie de vecteurs. Intersection de sous-espaces vectoriels. Somme de deux sous-espaces vectoriels. Somme directe. Caractérisation par l'intersection Sous-espaces supplémentaires.	
Familles finies de vecteurs	
Familles libres, liées.	Cas des vecteurs colinéaires, coplanaires. Vecteurs linéairement indépendants.
Toute famille finie de polynômes non nuls à coefficients dans $\mathbb{K}$ et de degrés échelonnés est libre.	La famille $(P_0,\dots,P_n)$ est dite de degrés échelonnés si $\deg(P_0) < \cdots < \deg(P_n)$.
Famille génératrice d'un sous-espace vectoriel.	

Contenus	Capacités & Commentaires
Base, coordonnées d'un vecteur dans une base. Bases canoniques des espaces $\mathbb{K}^n$, $\mathbb{K}_n[X]$ et $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. Base adaptée à une somme directe. Si $(e_1,\dots,e_k,e_{k+1},\dots,e_n)$ est une famille libre d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E alors $Vect(e_1,\dots,e_k)$ et $Vect(e_{k+1},\dots,e_n)$ sont en somme directe.	Matrice colonne des coordonnées.

B-Espaces de dimension finie

Contenus	Capacités & commentaires
Dimension finie	
Un espace vectoriel est dit de dimension finie s'il admet une famille génératrice finie. Théorème de la base extraite : de toute famille génératrice d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel non nul E , on peut extraire une base de E. Tout $\mathbb{K}$-espace vectoriel E non nul de dimension finie admet une base. Théorème de la base incomplète : toute famille libre de E peut être complétée en une base. Dans un espace engendré par n vecteurs, toute famille de $n+1$ vecteurs est liée.	Les vecteurs ajoutés peuvent être choisis parmi les vecteurs d'une famille génératrice donnée.
Dimensions. Dimensions de $\mathbb{K}^n$, $\mathbb{K}_n[X]$ et $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. Si E est dimension n et F est une famille de n vecteurs de E , alors F est une base de E si et seulement si F est libre, si et seulement si F est génératrice de E. Rang d'une famille finie de vecteurs d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension quelconque. Caractérisation des familles finies libres par le rang.	Droites et plans vectoriels.
Sous-espaces d'un espace vectoriel de dimension finie	
Dimension d'un sous-espace d'un espace de dimension finie. Cas d'égalité. Supplémentaires d'un sous-espace : existence, dimension commune, caractérisation par l'intersection et les dimensions. Dimension de la somme de deux sous-espaces (formule de Grassmann).	

C-Applications linéaires

Contenus	Capacités & commentaires
Généralités	
Applications linéaires, endomorphismes.	Notations $\mathscr{L}(E,F)$ et $\mathscr{L}(E)$.
Opérations et règles de calcul sur les applications linéaires : combinaison linéaire, composée.	
Image directe d'un sous-espace vectoriel.	
Image et noyau.	
Caractérisation de l'injectivité d'une application linéaire à l'aide de son noyau.	
Isomorphismes	
Isomorphismes, automorphismes.	
Réciproque d'un isomorphisme, composée d'isomorphismes.	Le groupe linéaire $GL(E)$.
Caractérisation des isomorphismes par les bases.	
Espaces isomorphes, caractérisation par la dimension.	Application à la dimension de l'espace des suites récurrentes linéaires d'ordre deux, détermination d'une base.
Si E et F ont même dimension finie alors une application linéaire de E dans F est bijective si et seulement si elle est injective, si et seulement si elle est surjective.	Cas particulier des endomorphismes.
Modes de définition d'une application linéaire	
Une application linéaire est entièrement déterminée par l'image d'une base.	
Une application linéaire définie sur $E = E_1 \oplus E_2$ est entièrement déterminée par ses restrictions à E_1 et E_2.	
Endomorphismes remarquables d'un espace vectoriel	
Identité et homothéties.	Notation Id_E.
Projecteurs et symétries associés à deux sous-espaces supplémentaires.	
Caractérisations : $p \circ p = p, s \circ s = id_E$.	
Rang d'une application linéaire	
Applications linéaires de rang fini.	$\mathrm{rg}(v \circ u) \leq \min(\mathrm{rg}(u), \mathrm{rg}(v))$.
Invariance du rang par composition à droite ou à gauche par un isomorphisme.	
Théorème du rang : si E est de dimension finie et si $u \in \mathscr{L}(E,F)$ alors u est de rang fini et $$\dim E = \dim \mathrm{Ker}\, u + \mathrm{rg}(u).$$	

Contenus	Capacités & Commentaires
Équations linéaires	
Structure de l'ensemble des solutions d'une équation linéaire.	Exemples des systèmes linéaires et des équations différentielles linéaires d'ordre un et deux. La notion de sous-espace affine est hors programme.

Matrices et déterminants (18 H)

Cette dernière partie du programme d'algèbre linéaire fait le lien entre la représentation géométrique (espaces vectoriels et applications linéaires) et la représentation numérique (matrices) dans le cadre de la dimension finie. Bien que naturellement liées à l'algorithme de Gauss-Jordan et aux changements de bases, les notions d'équivalence et de similitude matricielles ne sont pas au programme. D'une manière générale, les problématiques de classification géométrique des endomorphismes sont hors programme.

Dans un premier sous-chapitre intitulé "Matrices", on expose la représentation matricielle des applications linéaires en dimension finie au moyen de bases. Il en résulte une correspondance entre les registres géométriques et numériques. L'aspect numérique de la théorie présente l'avantage de fournir une résolution algorithmique à des problèmes linéaires ayant un nombre fini de degrés de liberté issus de la géométrie ou de l'analyse.

Le second sous-chapitre intitulé "Déterminants" développe une théorie du déterminant des matrices carrées, puis des endomorphismes d'un espace de dimension finie. Il met en évidence ses aspects algébrique (caractérisation des matrices inversibles) et géométrique (volume orienté).

Il est attendu des étudiants qu'ils maîtrisent les deux registres (géométrique et numérique), qu'ils sachent représenter numériquement un problème géométrique à l'aide de bases adaptées et interpréter géométriquement un problème numérique.

Le corps $\mathbb{K}$ est égal à $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

A-Matrices

Contenus	Capacités & commentaires
Matrices et applications linéaires	
Matrice d'une application linéaire dans un couple de bases. Calcul des coordonnées de l'image d'un vecteur par une application linéaire. Matrice d'une combinaison linéaire, d'une composée. Lien entre matrices inversibles et isomorphismes. Matrice de passage d'une base à une autre. Effet d'un changement de base sur la matrice d'un vecteur, d'une application linéaire, d'un endomorphisme.	Isomorphisme entre $\mathscr{L}(E,F)$ et $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. Application au calcul de la dimension de $\mathscr{L}(E,F)$.
Noyau, image et rang d'une matrice	
Application linéaire canoniquement associée à une matrice. Image et noyau d'une matrice de $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.	Interprétation en termes de systèmes linéaires.
Rang d'une matrice A.	Le rang d'une matrice est défini comme le rang du système de ses vecteurs colonnes ou de l'application linéaire canoniquement associée à A.
Théorème du rang. Caractérisations des matrices inversibles en termes de noyau, d'image, de rang.	Deux matrices équivalentes par lignes ou par colonnes ont le même rang.
Rang de la transposée.	Le rang d'une matrice est égal au rang de ses lignes, le rang d'un système linéaire homogène est égal au rang de sa matrice.

B-Déterminants

On motive les propriétés définissant un déterminant par celles de l'aire et du volume algébriques.
La théorie au programme évite le recours au groupe symétrique et limite l'intervention des formes multilinéaires. On commence par définir le déterminant d'une matrice carrée. La notion de matrice réduite échelonnée par colonnes et la décomposition résultant de l'algorithme de Gauss-Jordan appliqué aux colonnes d'une matrice carrée suffisent à démontrer les propriétés du déterminant sur $M_n(\mathbb{K})$.
On définit ensuite le déterminant d'un endomorphisme. Tout excès de technicité est exclu.
Les objectifs de ce chapitre sont les suivants :

- introduire la notion de déterminant d'une famille de vecteurs, en motivant sa construction par la géométrie ;
- établir les principales propriétés des déterminants des matrices carrées et des endomorphismes ;
- indiquer quelques méthodes simples de calcul de déterminants.

Dans ce sous-chapitre, n est supérieur ou égal à deux et E désigne un espace vectoriel de dimension finie n.

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
Déterminant d'une matrice carrée de taille n	
Il existe une unique application $f : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \longrightarrow \mathbb{K}$ vérifiant les trois propriétés suivantes : – f est linéaire par rapport à chacune des colonnes de sa variable ; – f est antisymétrique par rapport aux colonnes de sa variable ; – $f(I_n) = 1$.	La démonstration de ce théorème pour $n \geq 4$ et la notion générale de forme multilinéaire sont hors programme. On motivera géométriquement cette définition pour $n \in \{2, 3\}$ par les notions d'aire et de volume algébriques. On notera $\det(A)$ le nombre $f(A)$ pour toute matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
Propriétés du déterminant	
Le déterminant d'une matrice ayant deux colonnes égales est nul.	
$\det(\lambda A) = \lambda^n \det(A)$ pour tout $(\lambda, A) \in \mathbb{K} \times \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.	
Effet des opérations de pivot en colonnes sur un déterminant.	Les étudiants doivent savoir calculer un déterminant par opérations élémentaires sur les colonnes.
Applications : calcul du déterminant d'une matrice triangulaire.	
Une matrice carrée A est inversible si et seulement si $\det(A) \neq 0$.	
Déterminant d'une famille de vecteurs dans une base. Caractérisation des bases.	La formule de changement de bases est hors programme.
Déterminant d'un produit de matrices carrées, déterminant de l'inverse.	Le déterminant vérifie les mêmes propriétés vis-à-vis des lignes que des colonnes.
Déterminant de la transposée d'une matrice carrée.	
Développement par rapport à une colonne ou une ligne du déterminant d'une matrice.	Démonstration non exigible. La comatrice est hors programme.
Déterminant d'un endomorphisme	
Traduction sur les déterminants d'endomorphismes des propriétés vues sur les déterminants de matrices.	

Produit scalaire et espaces euclidiens (12 H)

La notion de produit scalaire a été étudiée d'un point de vue élémentaire dans l'enseignement secondaire. Les objectifs de ce chapitre sont les suivants :

– généraliser cette notion et exploiter, principalement à travers l'étude des projections orthogonales, l'intuition acquise dans des situations géométriques en dimension 2 ou 3 pour traiter des problèmes posés dans un contexte plus abstrait ;
– le théorème de projection orthogonale et l'existence de la meilleure approximation quadratique.

On s'appuie sur des exemples de géométrie du plan et de l'espace pour illustrer les différentes notions.
Dans toute la suite, E est un espace vectoriel réel.

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
Produit scalaire	
Produit scalaire. Espace préhilbertien, espace euclidien.	Notations $\langle x, y\rangle$, $(x\|y)$. Produit scalaire canonique sur $\mathbb{R}^n$, produit scalaire $(f\|g)=\int_a^b fg$ sur $\mathscr{C}^0([a,b],\mathbb{R})$.
Norme associée à un produit scalaire	
Norme associée à un produit scalaire. Inégalité de Cauchy-Schwarz, cas d'égalité.	Les étudiants doivent savoir développer $\\|u\pm v\\|^2$. Cas particuliers : Produit scalaire canonique et produit scalaire $(f\|g)=\int_a^b fg$ sur $\mathscr{C}^0([a,b],\mathbb{R})$.
Séparation, homogénéité, inégalité triangulaire (cas d'égalité).	
Orthogonalité	
Vecteurs orthogonaux, orthogonal d'un sous-espace vectoriel. Familles orthogonales, orthonormées (ou orthonormales). Liberté d'une famille orthogonale de vecteurs non nuls. Théorème de Pythagore. Algorithme d'orthonormalisation de Gram-Schmidt.	
Bases orthonormées d'un espace euclidien	
Existence de bases orthonormées. Coordonnées d'un vecteur dans une base orthonormée. Expressions du produit scalaire et de la norme dans une base orthonormée.	
Projection orthogonale sur un sous-espace de dimension finie	
Projeté orthogonal d'un vecteur x sur un sous-espace V de dimension finie. Projecteur orthogonal P_V.	Les étudiants doivent savoir déterminer $P_V(x)$ en calculant son expression dans une base orthonormée de V ou en résolvant un système linéaire traduisant l'orthogonalité de $x-P_V(x)$ aux vecteurs d'une famille génératrice de V.
Inégalité de Bessel : pour tout $x\in E$, $\\|P_V(x)\\|\leq\\|x\\|$. $P_V(x)$ est l'unique vecteur y_0 de V tel que $\\|x-y_0\\|=\min_{y\in V}\\|x-y\\|$.	La distance de x à V, notée $d(x,V)$, est égale à ce minimum.
Supplémentaire orthogonal d'un sous espace vectoriel V de dimension finie. En dimension finie, dimension de $V^\perp$.	

Deuxième Année

5 Mathématiques I : Deuxième Année Semestre 1

Intégration sur un intervalle quelconque (10 H)

L'objectif de ce chapitre est multiple :
- *étendre la notion d'intégrale étudiée en première année à des fonctions continues par morceaux sur un intervalle quelconque par le biais des intégrales généralisées ;*
- *définir, dans le cadre des fonctions continues par morceaux, la notion de fonction intégrable ;*

Les fonctions considérées sont définies sur un intervalle de $\mathbb{R}$ et à valeurs réelles ou complexes.

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
a) Intégrales généralisées sur $[a,+\infty[$	
Si f est une application à valeurs complexes continue par morceaux sur $[a,+\infty[$ alors l'intégrale $\int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ est dite convergente si $\int_a^{x} f(t)\,\mathrm{d}t$ a une limite finie lorsque x tend vers $+\infty$. Si tel est le cas, on note $\int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ cette limite.	Intégrale divergente.
Si f est continue par morceaux sur $[a,+\infty[$ et à valeurs positives, $\int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge si et seulement si $x \mapsto \int_a^{x} f(t)\,\mathrm{d}t$ est majorée.	
b) Intégrales généralisées sur un intervalle quelconque	
Adaptation du paragraphe précédent aux fonctions continues par morceaux définies sur un intervalle ouvert ou semi-ouvert de $\mathbb{R}$.	Notation $\int_a^{b} f(t)\,\mathrm{d}t$.
Intégrales de référence : $\int_1^{+\infty} t^{-\alpha}\,\mathrm{d}t$, $\int_0^{1} t^{-\alpha}\,\mathrm{d}t$.	Les étudiants doivent connaître la nature de $\int_0^{1} \ln(t)\,\mathrm{d}t$ et $\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\alpha t}\,\mathrm{d}t$ selon le signe de α.
Propriétés des intégrales généralisées : linéarité, positivité, croissance, relation de Chasles.	
Changement de variable : si $\varphi :]\alpha,\beta[\to]a,b[$ est une bijection strictement croissante de classe $\mathscr{C}^1$, et si $f :]a,b[\to \mathbb{C}$ est continue par morceaux alors $\int_\alpha^{\beta} (f\circ\varphi)(u)\varphi'(u)\,\mathrm{d}u$ est convergente si et seulement si $\int_a^{b} f(t)\,\mathrm{d}t$ est convergente et, si tel est le cas, elles sont égales.	Adaptation au cas où φ est strictement décroissante.
Intégration par parties sur un intervalle quelconque : $\int_a^{b} f(t)g'(t)\,\mathrm{d}t = [fg]_a^b - \int_a^{b} f'(t)g(t)\,\mathrm{d}t$.	L'existence des limites du produit fg aux bornes de l'intervalle assure que les intégrales de fg' et $f'g$ sont de même nature. Notation $[fg]_a^b$.

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
c) Intégrales absolument convergentes et fonctions intégrables	
Intégrale absolument convergente. La convergence absolue implique la convergence et dans ce cas la valeur absolue (ou le module) de l'intégrale est inférieure ou égale à l'intégrale de la valeur absolue (ou du module).	Pour une fonction à valeurs réelles, on utilise ses parties positive et négative.
Une fonction continue par morceaux sur un intervalle I est dite intégrable sur I si son intégrale sur I est absolument convergente.	Notations $\int_I f(t)\,\mathrm{d}t$, $\int_I f$.
Pour f et g fonctions continues par morceaux sur $[a,+\infty[$: – si $\|f\| \leqslant \|g\|$, alors l'intégrabilité de g implique celle de f sur $[a,+\infty[$. – si $f(x) \underset{x\to\infty}{=} O\big(g(x)\big)$, alors l'intégrabilité de g implique celle de f sur $[a,+\infty[$. – si $f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} g(x)$, alors l'intégrabilité de f est équivalente à celle de g sur $[a,+\infty[$.	Adaptation au cas d'un intervalle quelconque.
Si f est continue et intégrable sur I, alors $\int_I \|f(t)\|\,\mathrm{d}t = 0$ implique $f = 0$. Espace vectoriel des fonctions continues par morceaux intégrables sur I.	
Espace vectoriel des fonctions continues par morceaux de carré intégrable sur I. Inégalité de Cauchy-Schwarz.	Produit scalaire de deux fonctions continues de carré intégrable sur I à valeurs réelles.

Séries numériques (10 H)

Cette partie consolide et élargit les acquis de première année sur les séries, notamment la convergence absolue, en vue de l'étude des probabilités discrètes et des séries de fonctions.
La semi-convergence n'est pas un objectif du programme.

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
a) Compléments sur les séries à valeurs réelles	
Théorème de comparaison entre une série et une intégrale : si f est une fonction continue par morceaux sur $[0,+\infty[$, positive et décroissante alors la série $\sum_{n\geq 0} f(n)$ converge si et seulement si f est intégrable sur $[0,+\infty[$.	Les étudiants doivent savoir utiliser la comparaison série intégrale pour estimer des sommes partielles de séries divergentes ou des restes de séries convergentes dans le cas où f est monotone.
Formule de Stirling : équivalent de $n!$.	Démonstration non exigible.
Règle de d'Alembert.	
Théorème spécial des séries alternées, majoration et signe du reste.	La transformation d'Abel est hors programme.
b) Produit de Cauchy de deux séries	
Le produit de Cauchy de deux séries $\sum_{n\geq 0} u_n$ et $\sum_{n\geq 0} v_n$ de nombres complexes est la série $\sum_{n\geq 0} w_n$ avec : $$w_n = \sum_{p+q=n} u_q v_p.$$	

Contenus	Capacités & Commentaires
Si les séries $\sum_{n\geq 0} u_n$ et $\sum_{n\geq 0} v_n$ sont absolument convergentes alors la série $\sum_{n\geq 0} w_n$ l'est aussi et on a : $$\sum_{n=0}^{+\infty} w_n = \Big(\sum_{p=0}^{+\infty} u_p\Big)\Big(\sum_{q=0}^{+\infty} v_q\Big).$$	Démonstration non exigible.

Espaces vectoriels normés (20 H)

Ce chapitre vise les objectifs suivants :

- *généraliser au cas des espaces vectoriels de dimension finie sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ certaines notions (convergence de suites, limite et continuité de fonctions) étudiées en première année dans le cadre de l'analyse réelle, indispensables pour aborder l'étude des suites de matrices, des fonctions à valeurs vectorielles et du calcul différentiel ;*
- *préparer l'introduction de la norme de la convergence uniforme, afin de fournir un cadre topologique à la convergence des suites et séries de fonctions.*

L'aspect géométrique de certains concepts topologiques gagne à être illustré par de nombreuses figures.

Contenus	Capacités & commentaires
a) Normes sur un espace vectoriel normé	
Norme sur un espace vectoriel réel ou complexe ; espace vectoriel normé. Norme associée à un produit scalaire. Distance associée à une norme. Boules ouvertes, boules fermées, sphères.	Normes usuelles sur $\mathbb{K}^n$.
Parties convexes. Parties bornées, suites bornées, fonctions bornées.	Convexité des boules.
b) Suites d'un espace vectoriel normé de dimension finie	
Convergence d'une suite. Une suite convergente est bornée. Toute suite extraite d'une suite convergente est convergente.	Exemples de suites de matrices.
La convergence d'une suite et la valeur de sa limite ne dépendent pas du choix de la norme. L'étude de la convergence d'une suite se ramène à celle de ses coordonnées dans une base.	Résultat admis, qui pourra être illustré sur les normes usuelles définies sur $\mathbb{K}^p$.
d) Topologie d'un espace vectoriel normé de dimension finie	
L'étude topologique d'un espace vectoriel normé de dimension finie se ramène à celle de $\mathbb{K}^p$ muni d'une norme. Point intérieur à une partie.	Résultat admis.
Partie ouverte.	Une boule ouverte est un ouvert.
Point adhérent à une partie.	Caractérisation séquentielle.
Partie fermée.	Une boule fermée, une sphère sont des fermés.
Intérieur, adhérence, frontière.	Seules les définitions sont au programme. Ces notions sont illustrées par des figures.
e) Limite et continuité en un point	
Limite d'une fonction en un point adhérent à son domaine de définition. Caractérisation séquentielle.	

Contenus	Capacités & Commentaires
Équivalence entre l'existence d'une limite et celle des limites des coordonnées de la fonction dans une base de l'espace d'arrivée. Opérations algébriques sur les limites, composition. Continuité en un point. Lien avec la continuité des composantes. Caractérisation séquentielle.	
f) Continuité sur une partie	
Opérations algébriques, composition.	Si f est une application continue de E dans $\mathbb{R}$ alors l'ensemble défini par $f(x) > 0$ est un ouvert et les ensembles définis par $f(x) = 0$ ou $f(x) \geqslant 0$ sont des fermés.
Toute fonction réelle continue sur une partie fermée bornée est bornée et atteint ses bornes.	Démonstration non exigible.
Fonction lipschitzienne. Toute fonction lipschitzienne est continue.	
Toute application linéaire sur un espace de dimension finie est lipschitzienne.	La notion de norme subordonnée est hors programme.
Continuité des applications multilinéaires et polynômiales sur $\mathbb{K}^n$.	Exemple du déterminant.

Suites et séries de fonctions (30 H)

L'objectif de ce chapitre est multiple :

- *définir les modes usuels de convergence d'une suite et d'une série de fonctions et de les exploiter pour étudier la stabilité des propriétés de ces fonctions par passage à la limite. En prolongement du chapitre sur les espaces vectoriels normés de dimension finie, un lien est établi avec l'utilisation de la norme de la convergence uniforme.*
- *compléter le chapitre dédié à la notion d'intégrabilité par le théorème de la convergence dominée et le théorème d'intégration terme à terme ;*

Les fonctions sont définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Contenus	Capacités & commentaires
a) Modes de convergence d'une suite ou d'une série de fonctions	
Convergence simple, convergence uniforme d'une suite de fonctions. La convergence uniforme entraîne la convergence simple. Norme de la convergence uniforme sur l'espace des fonctions bornées à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.	
Convergence simple, convergence uniforme, convergence normale d'une série de fonctions.	Pour établir la convergence normale de $\sum f_n$, les étudiants doivent savoir utiliser une série numérique convergente $\sum \alpha_n$ majorante, c'est-à-dire telle que pour tout n, $\lVert f_n \rVert_\infty \leqslant \alpha_n$.
La convergence normale entraîne la convergence uniforme.	
b) Double limite	
Théorème de la double limite : soit (u_n) une suite de fonctions de I dans F convergeant uniformément vers u sur I, et soit a un point adhérent à I ; si, pour tout n, u_n admet une limite l_n en a, alors (l_n) admet une limite l et $u(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} l$.	Démonstration hors programme.

Contenus	Capacités & Commentaires
Adaptation aux cas où $a=+\infty$ et $a=-\infty$.	

c) Régularité de la limite d'une suite de fonctions

Continuité de la limite d'une suite de fonctions : si (f_n) converge uniformément vers f sur I et si, pour tout n, f_n est continue sur I, alors f est continue sur I.	Adaptation au cas où la convergence est uniforme sur tout segment de I.
Interversion limite-intégrale : si une suite (f_n) de fonctions continues converge uniformément vers f sur $[a,b]$ alors $$\int_a^b \lim_{n\to+\infty} f_n(t)\,\mathrm{d}t = \lim_{n\to+\infty}\int_a^b f_n(t)\,\mathrm{d}t.$$	
Dérivabilité de la limite d'une suite de fonctions : si (f_n) est une suite de fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ sur I qui converge simplement sur I vers f et telle que la suite (f_n') converge uniformément sur I vers h, alors f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur I et $f'=h$.	Adaptation au cas où la convergence est uniforme sur tout segment de I.
Extension aux fonctions de classe $\mathscr{C}^k$.	Les étudiants peuvent appliquer directement le théorème concluant au caractère $\mathscr{C}^k$ de la limite sous l'hypothèse de convergence simple des $(f_n^{(j)})$ pour $0\leqslant j\leqslant k-1$ et de convergence uniforme de $(f_n^{(k)})$ sur tout segment de I.

d) Régularité de la somme d'une série de fonctions

Adaptation au cas des séries de fonctions du théorème de la double limite énoncés ci-dessus.	
Continuité de la somme : si $\sum f_n$ converge uniformément sur I et si, pour tout n, f_n est continue sur I, alors $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} f_n$ est continue sur I.	Adaptation au cas où la convergence est uniforme sur tout segment de I.
Intégration terme à terme d'une série de fonctions : soit (f_n) une suite de fonctions continues sur $[a,b]$. Si la série $\sum f_n$ converge uniformément sur $[a,b]$ alors la série des intégrales est convergente et on a : $$\int_a^b \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty}\int_a^b f_n(t)\,\mathrm{d}t.$$	
Dérivation terme à terme d'une série de fonctions : soit (f_n) une suite de fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ sur I. Si la série $\sum f_n$ converge simplement sur I et si la série $\sum f_n'$ converge uniformément sur I, alors $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} f_n$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur I et sa dérivée est $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} f_n'$.	Adaptation au cas où la convergence est uniforme sur tout segment de I.
Extension aux fonctions de classe $\mathscr{C}^k$.	Les étudiants peuvent appliquer directement un théorème concluant au caractère $\mathscr{C}^k$ de la somme.

e) Suites et séries de fonctions intégrables

Théorème de convergence dominée :
Si (f_n) est une suite de fonctions continues par morceaux sur I convergeant simplement sur I vers une fonction f continue par morceaux et telle qu'il existe une fonction φ continue par morceaux et intégrable sur I vérifiant $|f_n| \leqslant \varphi$ pour tout n, alors les fonctions f_n et f sont intégrables sur I et :

$$\int_I f_n(t)\,\mathrm{d}t \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_I f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Démonstration hors programme.
L'hypothèse de continuité par morceaux de f, imposée par les limitations du programme, n'a pas l'importance de l'hypothèse de domination.

Théorème d'intégration terme à terme :
Si (f_n) est une suite de fonctions continues par morceaux et intégrables sur I, telle que la série $\sum f_n$ converge simplement vers une fonction f continue par morceaux sur I et telle que la série $\sum \int_I |f_n(t)|\,\mathrm{d}t$ converge, alors f est intégrable sur I et

$$\int_I f(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{\infty} \int_I f_n(t)\,\mathrm{d}t.$$

Démonstration hors programme.
L'hypothèse de continuité par morceaux de la somme, imposée par les limitations du programme, n'a pas l'importance de l'hypothèse de convergence de $\sum \int_I |f_n|$.

6 Mathématiques I : Deuxième Année Semestre 2

Intégrales à paramètre (12 H)

L'objectif de ce chapitre est d'étudier les fonctions définies par des intégrales dépendant d'un paramètre.

Contenus	Capacités & commentaires
Cas d'un intervalle quelconque	
Théorème de continuité : Si I et J sont deux intervalles de $\mathbb{R}$ et f une fonction définie sur $I \times J$, telle que : – pour tout $x \in I$, $t \mapsto f(x,t)$ est continue par morceaux sur J ; – pour tout $t \in J$, $x \mapsto f(x,t)$ est continue sur I ; – il existe une fonction φ positive et intégrable (en particulier, continue par morceaux) sur J, telle que pour tout $(x,t) \in I \times J$, on ait $\lvert f(x,t)\rvert \leqslant \varphi(t)$; alors la fonction $x \mapsto \int_J f(x,t)\,\mathrm{d}t$ est continue sur I.	Démonstration non exigible. Adaptation au cas où l'hypothèse de domination est vérifiée sur tout segment de I.
Théorème de dérivation : Si I et J sont deux intervalles de $\mathbb{R}$ et f une fonction définie sur $I \times J$, telle que : – Pour tout $x \in I$, $t \mapsto f(x,t)$ est intégrable sur J ; – Pour tout $t \in J$, $x \mapsto f(x,t)$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur I ; – Pour tout $x \in I$, $t \mapsto \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t)$ est continue par morceaux sur J ; – hypothèse de domination : Il existe une fonction φ positive et intégrable sur J, telle que pour tout $(x,t) \in I \times J$, on ait $\left\lvert \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t) \right\rvert \leqslant \varphi(t)$; alors la fonction $g : x \mapsto \int_J f(x,t)\,\mathrm{d}t$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur I et on a sur I : $$g'(x) = \int_J \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\,\mathrm{d}t.$$	Démonstration non exigible. Adaptation au cas où l'hypothèse de domination est vérifiée sur tout segment de I.
Extension aux fonctions de classe $\mathscr{C}^k$.	Les étudiants peuvent appliquer directement le théorème concluant au caractère $\mathscr{C}^k$ de la limite sous l'hypothèse d'intégrabilité de $t \mapsto \frac{\partial^j f}{\partial x^j}(x,t)$ pour tout x de I si $0 \leq j \leq k-1$ et de domination sur tout segment de $\frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x,t)$.
Conséquence 1 :(Cas d'un segment) Continuité et dérivabilité de g lorsque l'intervalle d'intégration J est un segment et f est continue à dérivée partielle première par rapport à x continue sur $I \times J$.)	

Contenus	Capacités & Commentaires
Conséquence 2 :(Formule de Fubini) Lorsque A est un intervalle de $\mathbb{R}$ et que f est continue sur $A\times[a,b]$, pour tout segment $[c,d]$ inclus dans A $\displaystyle\int_a^b\left(\int_c^d f(x,t)\,dx\right)dt=\int_c^d\left(\int_a^b f(x,t)\,dt\right)dx.$	

Séries entières (10 H)

Les objectifs de ce chapitre sont les suivants :

- *étudier la convergence d'une série entière de variable complexe et mettre en évidence la notion de rayon de convergence ;*
- *étudier les propriétés de sa somme en se limitant à la continuité dans le cas d'une variable complexe ;*
- *établir les développements en série entière des fonctions usuelles.*

La théorie des séries entières sera appliquée au cas des séries génératrices dans le chapitre dédié aux variables aléatoires discrètes et à la recherche de solutions d'équations différentielles linéaires.

Contenus	Capacités & commentaires
a) Rayon de convergence	
Lemme d'Abel : si la suite $(a_n z_0^n)$ est bornée alors, pour tout nombre complexe z tel que $\lvert z\rvert<\lvert z_0\rvert$, la série $\sum a_n z^n$ est absolument convergente.	
Rayon de convergence R défini comme borne supérieure dans $\overline{\mathbb{R}}$ de l'ensemble des réels positifs ρ tels que la suite $(a_n\rho^n)$ est bornée.	Pour $\lvert z\rvert<R$, la série $\sum a_n z^n$ converge absolument.
Disque ouvert de convergence, intervalle ouvert de convergence.	
Si R_a est le rayon de convergence de $\sum a_n z^n$ et R_b celui de $\sum b_n z^n$, alors : si $a_n=O(b_n)$, alors $R_a\geqslant R_b$; si $\lvert a_n\rvert\sim\lvert b_n\rvert$, alors $R_a=R_b$.	
Les séries entières $\sum a_n z^n$ et $\sum n a_n z^n$ ont même rayon de convergence.	
Utilisation de la règle de d'Alembert (pour les séries numériques).	
Rayon de convergence de la somme et du produit de Cauchy de deux séries entières.	
b) Régularité de la somme	
Convergence normale d'une série entière d'une variable réelle sur tout segment inclus dans l'intervalle ouvert de convergence.	
Continuité de la somme sur l'intervalle ouvert de convergence.	On admet la continuité de la somme d'une série entière d'une variable complexe sur le disque ouvert de convergence. L'étude des propriétés de la somme au bord de l'intervalle ou du disque de convergence n'est pas un objectif du programme.
Primitivation d'une série entière d'une variable réelle sur l'intervalle ouvert de convergence.	
Caractère $\mathscr{C}^\infty$ de la somme d'une série entière d'une variable réelle sur l'intervalle ouvert de convergence et obtention des dérivées par dérivation terme à terme.	

Contenus	Capacités & Commentaires
Expression des coefficients d'une série entière au moyen des dérivées successives en 0 de sa somme.	

c) Développement en série entière au voisinage de 0 d'une fonction d'une variable réelle

Contenus	Capacités & Commentaires
Fonction développable en série entière. Série de Taylor d'une fonction de classe $\mathscr{C}^\infty$. Unicité du développement en série entière. Développements des fonctions usuelles.	Les étudiants doivent connaître les développements en série entière des fonctions exponentielle, cosinus, sinus, cosinus et sinus hyperboliques, $x \mapsto \operatorname{Arctan} x$, $x \mapsto \ln(1+x)$ et $x \mapsto (1+x)^\alpha$. Les étudiants doivent savoir utiliser une équation différentielle linéaire pour développer une fonction en série entière.

d) Séries géométrique et exponentielle d'une variable complexe

Contenus	Capacités & Commentaires
Développement de $\frac{1}{1-z}$ sur le disque unité ouvert. Développement de $\exp(z)$ sur $\mathbb{C}$. Exemples d'utilisation de développements en série entière pour la resolution des équations différentielles.	

Probabilités (40H)

Les chapitres de probabilités permettent de développer les compétences suivantes :

- *modéliser des situations aléatoires par le choix d'un espace probabilisé ou de variables aléatoires adéquats ;*
- *maîtriser un formalisme spécifique aux probabilités.*

A-Espaces probabilisés

Cette partie a pour objectif la mise en place du cadre général de la théorie des probabilités permettant d'aborder l'étude de processus stochastiques à temps discret. Cette mise en place se veut minimale. En particulier :

- *la notion de tribu ne doit donner lieu à aucun développement théorique autre que sa définition ;*
- *la construction d'espaces probabilisés n'est pas un objectif du programme.*

Contenus	Capacités & commentaires

a) Ensembles dénombrables

Contenus	Capacités & commentaires
Un ensemble est dit dénombrable s'il est en bijection avec $\mathbb{N}$. Ensembles finis ou dénombrables. Dénombrabilité de $\mathbb{Z}$, d'un produit cartésien de deux ensembles dénombrables.	Un ensemble fini ou dénombrable peut être décrit en extension sous la forme $\{x_n\,;\ n \in \mathbb{N}\}$. Toute autre connaissance sur la dénombrabilité est hors programme.

b) Espace probabilisé

Contenus	Capacités & commentaires
Si Ω est un ensemble, on appelle *tribu* sur Ω une partie $\mathscr{A}$ de l'ensemble $\mathscr{P}(\Omega)$ des parties de Ω telle que : i. $\Omega \in \mathscr{A}$, ii. pour tout $A \in \mathscr{A}$, $\overline{A} = \Omega \setminus A \in \mathscr{A}$, iii. pour toute suite $(A_n)_{n\geqslant 0}$ d'éléments de $\mathscr{A}$, la réunion $\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n$ appartient à $\mathscr{A}$.	L'ensemble Ω est l'univers ; il n'est en général pas précisé. Les éléments de $\mathscr{A}$ sont les événements. Les étudiants doivent savoir expliciter un événement à partir d'autres événements en utilisant la réunion, l'intersection et le complémentaire. On fait le parallèle entre le vocabulaire probabiliste et le vocabulaire ensembliste.

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
Si Ω est un ensemble et $\mathscr{A}$ une tribu sur Ω, on appelle *probabilité* sur $(\Omega, \mathscr{A})$ une application $P : \mathscr{A} \to [0,1]$ telle que : i. $P(\Omega) = 1$, ii. pour toute suite $(A_n)_{n\geqslant 0}$ d'événements incompatibles, $$P\Big(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\Big) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(A_n).$$ On appelle espace probabilisé un triplet $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ où $\mathscr{A}$ est une tribu et P une probabilité sur $(\Omega, \mathscr{A})$. Propriétés : – $\bigcap_{n=0}^{+\infty} A_n \in \mathscr{A}$. – Continuité croissante : si $(A_n)_{n\geqslant 0}$ est une suite d'événements telle que, pour tout n, on ait $A_n \subset A_{n+1}$, alors : $$\lim_{n\to+\infty} P(A_n) = P\Big(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\Big).$$ – Continuité décroissante : si $(A_n)_{n\geqslant 0}$ est une suite d'événements telle que, pour tout n, on ait $A_{n+1} \subset A_n$, alors : $$\lim_{n\to+\infty} P(A_n) = P\Big(\bigcap_{n=0}^{+\infty} A_n\Big).$$ – Sous additivité : si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite d'événements, alors : $$P\Big(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\Big) \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} P(A_n).$$	

c) Conditionnement et indépendance

Si A et B sont deux événements tels que $P(B) > 0$, on appelle probabilité conditionnelle de A sachant B le réel $$P_B(A) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)}$$	Notation $P_B(A) = P(A \mid B)$. L'application P_B est une probabilité sur $(\Omega, \mathscr{A})$. Ce paragraphe étend rapidement les concepts et résultats vus en première année dans le cadre des univers finis.
Formule des probabilités composées. Système complet dénombrable d'événements. Formule des probabilités totales : si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est un système complet d'événements, alors la série $\sum P(B\cap A_n)$ converge et $$P(B) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(B\cap A_n) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(B \mid A_n)\, P(A_n)$$	On adopte la convention $P(B \mid A_n)P(A_n) = 0$ lorsque $P(A_n) = 0$. La formule reste valable dans le cas d'une suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'événements deux à deux incompatibles tels que $\sum_{n=0}^{+\infty} P(A_n) = 1$.
Formule de Bayes. Indépendance de deux événements.	Si $P(B) > 0$, l'indépendance de A et B équivaut à $P(A \mid B) = P(A)$.
Indépendance mutuelle d'une famille finie d'événements.	L'indépendance des événements A_i deux à deux n'entraîne pas leur indépendance mutuelle si $n \geqslant 3$.

B-Variables aléatoires discrètes

Les objectifs de cette partie sont les suivants :
- *étendre la notion de variable aléatoire finie à des variables dont l'image est un ensemble dénombrable ;*
- *fournir des outils permettant, sur des exemples simples, l'étude de processus stochastiques à temps discret ;*
- *exposer deux résultats asymptotiques : l'approximation de la loi binomiale par la loi de Poisson et la loi faible des grands nombres ;*
- *introduire les fonctions génératrices et utiliser les propriétés des séries entières.*

La construction d'espaces probabilisés modélisant une suite d'expériences aléatoires est hors programme, on admet l'existence de tels espaces. Les différents types de convergence probabiliste (presque sûre, en probabilité, en loi, en moyenne) sont hors programme.
Toutes les variables aléatoires mentionnées dans le programme sont implicitement supposées discrètes.

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
a) Généralités	
Une variable aléatoire discrète X sur $(\Omega, \mathscr{A})$ est une application définie sur Ω dont l'image est finie ou dénombrable et telle que l'image réciproque de tout élément de $X(\Omega)$ appartient à $\mathscr{A}$. Notations $(X \in U)$, $\{X \in U\}$. Loi d'une variable aléatoire discrète.	Pour tout $U \subset X(\Omega)$, $X^{-1}(U)$ est un événement.
Fonction de répartition d'une variable aléatoire réelle. Croissance, limites en $-\infty$ et en $+\infty$.	$F_X(x) = P(X \leqslant x)$. L'étude des propriétés de continuité des fonctions de répartition n'est pas au programme.
Si X prend ses valeurs dans $\{\, x_n \,;\, n \geqslant 0 \,\}$, les x_n étant distincts, et si $(p_n)_{n\geqslant 0}$ est une suite de réels positifs vérifiant $\sum_{n=0}^{+\infty} p_n = 1$, alors il existe une probabilité P sur $(\Omega, \mathscr{A})$ telle que $P(X = x_n) = p_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.	Démonstration hors programme.
Couple de variables aléatoires discrètes. Loi conjointe et lois marginales Loi conditionnelle de Y sachant $(X = x)$. Deux variables aléatoires X et Y discrètes définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ sont dites indépendantes si, pour tout $(x, y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)$, $$P(X = x, Y = y) = P(X = x)P(Y = y).$$	Extension aux variables discrètes des notions étudiées en première année sur les variables finies.
Si X et Y sont indépendantes, alors, pour toute partie $A \subset X(\Omega)$ et toute partie $B \subset Y(\Omega)$, on a $$P(X \in A, Y \in B) = P(X \in A)P(Y \in B)$$	Démonstration hors programme.
Si X et Y sont deux variables aléatoires indépendantes alors, pour toutes fonctions f et g, les variables $f(X)$ et $g(Y)$ sont indépendantes.	
Variables mutuellement indépendantes.	Extension sans démonstration aux variables discrètes des notions et des résultats vus en première année.
Suite de variables aléatoires indépendantes (deux à deux ou mutuellement).	La démonstration de l'existence d'un espace probabilisé portant une suite de variables aléatoires mutuellement indépendantes de lois discrètes donnés est hors programme. Application à la modélisation d'un jeu de pile ou face infini par une suite de variables aléatoires de Bernoulli mutuellement indépendantes.

Contenus	Capacités & Commentaires
b) Espérance et variance	
La variable aléatoire réelle discrète X à valeurs dans un ensemble dénombrable $\{x_n\,;\, n \geqslant 0\}$ est dite d'espérance finie si la série $\sum x_n P(X = x_n)$ est absolument convergente ; si tel est le cas, on appelle espérance de X, noté $\mathrm{E}(X)$, le réel $\sum_{n=0}^{+\infty} x_n P(X = x_n)$.	On admet que la somme $\sum_{n=0}^{+\infty} x_n P(X = x_n)$ ne dépend pas de l'ordre d'énumération.
Si X est à valeurs dans $\mathbb{N}$, alors $\mathrm{E}(X) = \sum_{n=1}^{+\infty} P(X \geqslant n)$.	
Théorème du transfert : si X est une variable aléatoire et f une application à valeurs réelles définie sur l'image $\{x_n,\ n \in \mathbb{N}\}$ de X, alors $f(X)$ est d'espérance finie si et seulement si la série $\Sigma P(X = x_n)\, f(x_n)$ converge absolument. Dans ce cas, on a : $$\mathrm{E}(f(X)) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(X = x_n)\, f(x_n).$$	Démonstration hors programme.
Linéarité de l'espérance.	Démonstration non exigible.
Positivité, croissance de l'espérance.	
Si X et Y sont deux variables aléatoires discrètes indépendantes, alors $\mathrm{E}(XY) = \mathrm{E}(X)\mathrm{E}(Y)$.	Démonstration hors programme.
Si la variable aléatoire X^2 est d'espérance finie, alors X est elle-même d'espérance finie.	
Si X^2 est d'espérance finie, la variance de X est le réel $\mathrm{V}(X) = \mathrm{E}\big((X - \mathrm{E}(X))^2\big) = \mathrm{E}(X^2) - \mathrm{E}(X)^2$.	
Écart type $\sigma(X) = \sqrt{\mathrm{V}(X)}$.	
Pour a et b réels et X une variable aléatoire réelle, égalité $\mathrm{V}(aX + b) = a^2\,\mathrm{V}(X)$.	
Inégalités de Markov et de Bienaymé-Tchebychev.	Brève extension des résultats obtenus dans le cadre d'un univers fini.
Variance d'une somme finie de variables aléatoires ; cas de variables deux à deux indépendantes.	
Covariance, coefficient de corrélation.	Notations : $\mathrm{Cov}(X, Y)$ et $\rho(X, Y)$.
Encadrement $-1 \leqslant \rho(X, Y) \leqslant 1$.	Inégalité de Cauchy-Schwarz.
c) Variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}$	
Série génératrice d'une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$: $$G_X(t) = \mathrm{E}(t^X) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(X = n)\, t^n.$$	La loi d'une variable aléatoire X à valeurs dans $\mathbb{N}$ est caractérisée par sa série génératrice G_X.
Le rayon de convergence est au moins égal à 1.	
La variable aléatoire X admet une espérance $\mathrm{E}(X)$ si et seulement si G_X est dérivable en 1 et, si tel est le cas, $\mathrm{E}(X) = G'_X(1)$.	Démonstration non exigible.
La variable aléatoire X admet une variance si et seulement si G_X est deux fois dérivable en 1.	Démonstration non exigible. Les étudiants doivent savoir retrouver l'expression de $\mathrm{V}(X)$ en fonction de $G'_X(1)$ et de $G''_X(1)$ en cas d'existence.
Série génératrice de la somme de deux variables aléatoires indépendantes.	

Contenus	Capacités & Commentaires
d) Lois usuelles	
Pour p dans $]0,1[$, loi géométrique de paramètre p : la variable aléatoire X suit une loi géométrique de paramètre p si et seulement si $$\forall k \in \mathbb{N}^*, \qquad P(X=k) = p(1-p)^{k-1}.$$	Notation $X \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$. La loi géométrique peut être interprétée comme rang du premier succès dans une suite illimitée d'épreuves de Bernoulli indépendantes et de même paramètre p.
Série génératrice, espérance et variance. Caractérisation comme loi sans mémoire : $$P(X > n+k \mid X > n) = P(X > k).$$	
Loi de Poisson de paramètre λ. Série génératrice, espérance et variance. Somme de deux variables indépendantes suivant une loi de Poisson.	Notation $X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$.
e) Résultats asymptotiques	
Approximation de la loi binomiale par la loi de Poisson : si, pour tout n, $X_n \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p_n)$ et si $\lim\limits_{n\to+\infty} n p_n = \lambda$, alors, pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a $$\lim_{n\to+\infty} P(X_n = k) = \mathrm{e}^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k\,!}.$$	Interprétation de la loi de Poisson comme loi des événements rares. La notion de convergence en loi est hors programme.
Loi faible des grands nombres : si $(X_n)_{n\geqslant 1}$ est une suite de variables aléatoires deux à deux indépendantes et de même loi admettant un moment d'ordre 2, alors, si $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} X_k$, $m = \mathrm{E}(X_1)$ et $\sigma = \sigma(X_1)$, on a pour tout $\varepsilon > 0$, $$P\left(\left\lvert \frac{1}{n} S_n - m \right\rvert \geqslant \varepsilon\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$	Estimation : pour tout $\varepsilon > 0$, $$P\left(\left\lvert \frac{1}{n} S_n - m \right\rvert \geqslant \varepsilon\right) \leqslant \frac{\sigma^2}{n\varepsilon^2}.$$

7 Mathématiques II : Deuxième Année Semestre 1

Algèbre linéaire (45 H)

Dans toute cette partie, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

A-Espaces vectoriels, endomorphismes et matrices

Le programme est organisé autour de trois objectifs :
- *consolider les acquis de la classe de première année ;*
- *étudier de nouveaux concepts : somme de plusieurs sous-espaces vectoriels, sous-espaces stables, trace ;*
- *passer du registre géométrique au registre matriciel et inversement.*

Le programme valorise les interprétations géométriques et l'illustration des notions et des résultats par de nombreuses figures.

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
a) Produit et somme d'espaces vectoriels	
Produit d'un nombre fini d'espaces vectoriels ; dimension dans le cas où ces espaces sont de dimension finie. Somme, somme directe d'une famille finie de sous-espaces vectoriels ; sous-espaces supplémentaires.	
Base d'un espace vectoriel E de dimension finie adaptée à un sous-espace vectoriel F de E ; base d'un espace vectoriel E de dimension finie adaptée à une décomposition en somme directe $E = \bigoplus E_i$.	Décomposition en somme directe obtenue par fractionnement d'une base.
Si $F_1, \ldots, F_p$ sont des sous-espaces de dimension finie, alors : $$\dim\Big(\sum_{i=1}^{p} F_i\Big) \leqslant \sum_{i=1}^{p} \dim(F_i)$$ avec égalité si et seulement si la somme est directe.	
b) Matrices par blocs et sous-espaces stables	
Matrices définies par blocs, opérations.	
Sous-espace vectoriel stable par un endomorphisme, endomorphisme induit.	Les étudiants doivent savoir traduire matriciellement la stabilité d'un sous-espace vectoriel par un endomorphisme et interpréter en termes d'endomorphismes une matrice triangulaire ou diagonale par blocs.
Si u et v commutent, le noyau et l'image de u sont stables par v.	
c) Déterminants	
Exemples de déterminants.	Les étudiants doivent savoir calculer le déterminant d'une matrice triangulaire par blocs, et connaître l'expression d'un déterminant de Vandermonde.
d) Matrices semblables et trace	
Matrices semblables.	La notion de matrices équivalentes est hors programme.

Contenus	Capacités & Commentaires
Trace d'une matrice carrée. Linéarité ; trace de la transposée d'une matrice, du produit de deux matrices. Invariance de la trace par similitude. Trace d'un endomorphisme d'un espace de dimension finie.	

B-Réduction des endomorphismes et des matrices carrées

Après avoir introduit le vocabulaire des éléments propres en dimension quelconque, cette partie s'intéresse de manière plus approfondie au cas de la dimension finie, et à la question de diagonalisabilité d'une matrice carrée.
L'application des résultats de la réduction à la recherche des solutions d'une récurrence linéaire à coefficients constants crée un nouveau pont entre l'algèbre et l'analyse et anticipe l'étude des équations différentielles linéaires, dont la résolution repose sur des outils similaires.
La notion de polynôme annulateur est hors programme. L'étude des classes de similitude est hors programme.

Contenus	Capacités & commentaires
a) Éléments propres	
Droite stable par un endomorphisme u d'un espace vectoriel E.	
Valeur propre, vecteur propre, sous-espace propre d'un endomorphisme, d'une matrice carrée.	Les étudiants doivent savoir que si u et v commutent, les sous-espaces propres de u sont stables par v.
Spectre d'un endomorphisme en dimension finie, d'une matrice carrée.	Notation $\mathrm{Sp}(u)$. La notion de valeur spectrale est hors programme.
Les sous-espaces propres sont en somme directe.	
Polynôme caractéristique d'une matrice carrée, d'un endomorphisme en dimension finie.	Par convention le polynôme caractéristique est unitaire. Notations χ_A, χ_u.
Les valeurs propres sont les racines du polynôme caractéristique.	Le théorème de Cayley-Hamilton est hors programme.
Expressions du déterminant et de la trace en fonction des valeurs propres dans le cas où le polynôme caractéristique est scindé.	
Multiplicité d'une valeur propre.	
Majoration de la dimension d'un sous-espace propre.	
b) Diagonalisation en dimension finie	
Un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie est dit diagonalisable s'il existe une base dans laquelle sa matrice est diagonale.	
Une matrice carrée est dite diagonalisable si l'endomorphisme de $\mathbb{K}^n$ canoniquement associé est diagonalisable.	
Une matrice carrée est diagonalisable si et seulement si elle est semblable à une matrice diagonale.	Dans la pratique des cas numériques, on se limite à $n=2$ ou $n=3$.
Un endomorphisme est diagonalisable si et seulement si la somme des dimensions de ses sous-espaces propres est égale à la dimension de l'espace .	Exemple des projecteurs et des symétries.
Un endomorphisme est diagonalisable si et seulement si son polynôme caractéristique est scindé sur le corps de base $\mathbb{K}$ et si, pour toute valeur propre, la dimension du sous-espace propre associé est égale à sa multiplicité dans le polynôme caractéristique.	
Un endomorphisme admettant n valeurs propres distinctes est diagonalisable.	Interprétation matricielle de ces résultats.
Calcul des puissances d'une matrice diagonalisable.	

Contenus	Capacités & Commentaires
Application à la résolution des récurrences linéaires d'ordre p à coefficients constants lorsque l'équation caractéristique admet p racines distinctes.	Les étudiants doivent savoir traduire matriciellement une relation de récurrence linéaire.

c) Trigonalisation en dimension finie

Contenus	Capacités & Commentaires
Un endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension finie est dit trigonalisable s'il existe une base de E dans laquelle sa matrice est triangulaire supérieure. Une matrice est dite trigonalisable si elle est semblable à une matrice triangulaire supérieure.	
Un endomorphisme est trigonalisable si et seulement si son polynôme caractéristique est scindé sur le corps $\mathbb{K}$. En particulier, toute matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ est trigonalisable.	Démonstration non exigible. Interprétation matricielle de ce résultat. La technique générale de trigonalisation n'est pas au programme. On se limite dans la pratique à des exemples simples en petite dimension et tout exercice de trigonalisation effective doit comporter une indication.
Application à la résolution des récurrences linéaires d'ordre 2 à coefficients constants.	

Fonctions vectorielles, arcs paramétrés (10 H)

L'objectif de ce chapitre est double :

- *généraliser aux fonctions à valeurs dans $\mathbb{R}^n$ la notion de dérivée d'une fonction numérique, en vue notamment de préparer le chapitre sur les équations différentielles ;*
- *formaliser des notions géométriques (arc paramétré, tangente) et cinématiques (vitesse, accélération) rencontrées dans d'autres disciplines scientifiques.*

Toutes les fonctions sont définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}^n$.

Contenus	Capacités & commentaires

a) Dérivabilité et opérations sur les fonctions dérivables

Contenus	Capacités & commentaires
Dérivabilité en un point. Dérivabilité sur un intervalle.	Taux d'accroissement et développement limité d'ordre un. Interprétations géométrique et cinématique.
Combinaison linéaire de fonctions dérivables. Dérivée de $L\circ f$, $B(f,g)$, $f\circ\varphi$ où f et g sont dérivables et à valeurs vectorielles, L est linéaire, B est bilinéaire, φ est dérivable et à valeurs réelles.	Application au produit scalaire et au déterminant dans une base de $\mathbb{R}^2$ de deux fonctions vectorielles.

b) Fonctions de classe $\mathscr{C}^k$

Contenus	Capacités & commentaires
Fonction de classe $\mathscr{C}^k$, de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur un intervalle.	
Opérations sur les fonctions de classe $\mathscr{C}^k$, de classe $\mathscr{C}^\infty$.	Brève extension des résultats du paragraphe précédent.

c) Arcs paramétrés

Contenus	Capacités & commentaires
Arc paramétré de classe $\mathscr{C}^k$, avec $k\in\mathbb{N}^*$. Point régulier, tangente en un point régulier.	
Construction d'arcs plans.	L'étude des points stationnaires, des asymptotes et des arcs définis en coordonnées polaires est hors programme.

Équations différentielles linéaires (15 H)

L'étude des équations différentielles linéaires scalaires d'ordres un et deux, abordée en première année, se poursuit par celle des systèmes différentiels linéaires d'ordre 1 *et des équations scalaires à coefficients non constants, en mettant l'accent sur les équations d'ordre deux. On s'attache à développer à la fois les aspects théorique et pratique :*
- *la forme des solutions ;*
- *le théorème de Cauchy linéaire ;*
- *le lien entre les équations scalaires et les systèmes différentiels d'ordre un ;*
- *la résolution explicite.*

Ce chapitre favorise les interactions avec les autres disciplines scientifiques.

Dans tout ce chapitre, $\mathbb{K}$ *désigne* $\mathbb{R}$ *ou* $\mathbb{C}$ *et* I *est un intervalle de* $\mathbb{R}$.

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
a) Systèmes différentiels	
Équation de la forme $X' = A(t)X + B(t)$ où $A : I \to \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $B : I \to \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ sont continues.	
Forme des solutions : somme d'une solution particulière et de la solution générale de l'équation homogène.	
Théorème de Cauchy linéaire : existence et unicité de la solution d'un problème de Cauchy.	Démonstration hors programme.
Isomorphisme entre $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ et l'espace vectoriel des solutions de $X' = A(t)X$.	Dimension de l'espace vectoriel des solutions.
Système différentiel linéaire à coefficients constants $X' = AX$.	
Résolution lorsque A est une matrice diagonalisable.	Exemples de résolution dans le cas où A est trigonalisable.
b) Équations différentielles linéaires scalaires	
Équation différentielle scalaire d'ordre 2 à coefficients continus $y'' + a(t)y' + b(t)y = c(t)$.	Les étudiants doivent savoir écrire cette équation sous la forme d'un système différentiel $X' = A(t)X + B(t)$.
Forme des solutions : somme d'une solution particulière et de la solution générale de l'équation homogène.	La recherche d'une solution particulière de l'équation complète doit comporter des indications.
Théorème de Cauchy linéaire : existence et unicité de la solution d'un problème de Cauchy.	
Espace vectoriel des solutions de l'équation homogène, dimension.	
Cas des équations à coefficients constants.	On relie les résultats obtenus en première année à l'aide de l'équation caractéristique à la réduction de la matrice du système différentiel associé. Les étudiants doivent savoir trouver une solution particulière de l'équation complète pour un second membre de la forme $A\cos(\omega t)$ ou $A\sin(\omega t)$. La méthode de la variation des constantes est hors programme.

8 Mathématiques II : Deuxième Année Semestre 2

Espaces euclidiens (40 H)

Ce chapitre est organisé autour de trois objectifs :
- *consolider les acquis de la classe de première année sur les espaces euclidiens ;*
- *étudier les isométries vectorielles et les matrices orthogonales, et les classifier en dimension deux en insistant sur les représentations géométriques ;*
- *énoncer les formes géométrique et matricielle du théorème spectral.*

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
a) Isométries vectorielles	
Un endomorphisme d'un espace euclidien E est une isométrie vectorielle s'il conserve la norme.	Autre dénomination : automorphisme orthogonal. Exemple des réflexions en dimensions deux et trois.
Caractérisations par la conservation du produit scalaire, par l'image d'une base orthonormale.	
Groupe orthogonal.	Notation $\mathrm{O}(E)$.
Stabilité de l'orthogonal d'un sous-espace stable.	
b) Matrices orthogonales	
Une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est dite orthogonale si l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ qui lui est canoniquement associé est une isométrie vectorielle.	Caractérisation comme matrice de changement de base orthonormale.
Caractérisation par l'une des relations $MM^{\mathrm{T}} = I_n$ ou $M^{\mathrm{T}}M = I_n$.	Interprétation en termes de colonnes et de lignes.
Caractérisation d'un automorphisme orthogonal à l'aide de sa matrice dans une base orthonormale.	
Groupe orthogonal d'ordre n.	Notations $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$, $\mathrm{O}(n)$.
Déterminant d'une matrice orthogonale. Groupe spécial orthogonal.	Notations $\mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$, $\mathrm{SO}(n)$.
Orientation d'un espace euclidien.	
c) Isométries vectorielles d'un plan euclidien	
Détermination des matrices de $\mathrm{O}_2(\mathbb{R})$, de $\mathrm{SO}_2(\mathbb{R})$.	Commutativité de $\mathrm{SO}_2(\mathbb{R})$.
Mesure de l'angle d'une rotation d'un plan euclidien orienté.	Écriture complexe d'une rotation.
Classification des isométries vectorielles d'un plan euclidien.	

Contenus	Capacités & Commentaires
d) Réduction des endomorphismes symétriques et des matrices symétriques réelles	
Endomorphisme symétrique d'un espace euclidien. Si $\mathscr{B}$ est une base orthonormale de E et u un endomorphisme de E, alors u est symétrique si et seulement si $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u)$ est symétrique.	
Théorème spectral : un endomorphisme symétrique d'un espace euclidien admet une base orthonormale de vecteurs propres. Interprétation matricielle : pour toute matrice symétrique réelle A, il existe D diagonale réelle et P orthogonale telles que $A = PDP^{-1}$.	Démonstration non exigible.

Calcul différentiel (25 H)

L'étude d'une fonction de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}^n$ se ramenant à celle de ses coordonnées, ce chapitre privilégie l'étude des fonctions de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}$. Il est axé sur la mise en place d'outils permettant de traiter des applications du calcul différentiel à l'analyse et la géométrie : résolution d'équations aux dérivées partielles, problèmes d'extremums, courbes, surfaces. On se limite en pratique au cas $p \leqslant 3$.

Contenus	Capacités & commentaires
a) Fonctions de classe $\mathscr{C}^1$	
Dérivées partielles d'ordre 1 en un point d'une fonction définie sur un ouvert U de $\mathbb{R}^p$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. Une fonction est dite de classe $\mathscr{C}^1$ sur U si ses dérivées partielles d'ordre 1 existent et sont continues sur U. Opérations sur les fonctions de classe $\mathscr{C}^1$.	Notations $\partial_i f(a)$, $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(a)$.
Une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur U admet en tout point a de U un développement limité d'ordre 1.	Démonstration non exigible. Une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur U est continue sur U.
Différentielle de f en a.	Elle est définie comme l'application linéaire $\mathrm{d}f(a)$ de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}$: $(h_1,\dots,h_p) \mapsto \sum_{i=1}^{p} h_i \partial_i f(a)$. Notation $\mathrm{d}f(a)\cdot h$.
b) Règle de la chaîne	
Dérivée de $t \mapsto f\big(x_1(t),\dots,x_p(t)\big)$. Caractérisation des fonctions constantes sur un ouvert convexe.	
Application au calcul des dérivées partielles de $(u,v) \mapsto f\big(x(u,v), y(u,v)\big)$.	Les étudiants doivent connaître le cas particulier des coordonnées polaires.
c) Gradient	
Dans $\mathbb{R}^p$ muni de sa structure euclidienne canonique, gradient d'une fonction de classe $\mathscr{C}^1$. Relation $\forall h \in \mathbb{R}^p$, $\mathrm{d}f(a)\cdot h = (\nabla f(a) \mid h)$.	Le gradient est défini par ses coordonnées. Notation $\nabla f(a)$.
d) Applications géométriques	
Courbe du plan définie par une équation $f(x,y) = 0$ avec f de classe $\mathscr{C}^1$. Point régulier.	

Contenus	Capacités & Commentaires
Équation de la tangente en un point régulier.	On admet l'existence d'un paramétrage local de classe $\mathscr{C}^1$.
En un point où il est non nul, le gradient de f est orthogonal aux lignes de niveau $f(x,y)=\lambda$ et orienté dans le sens des valeurs croissantes de f.	
Surface définie par une équation $f(x,y,z)=0$ avec f de classe $\mathscr{C}^1$.	
Point régulier.	
Courbes tracées sur une surface.	Cas particulier des courbes coordonnées d'une surface d'équation $z=g(x,y)$.
Plan tangent à une surface en un point régulier défini comme le plan orthogonal au gradient et passant par le point.	Tangentes aux courbes régulières de classe $\mathscr{C}^1$ tracées sur la surface.
e) Dérivées partielles d'ordre deux	
Dérivées partielles d'ordre 2 d'une fonction de deux ou trois variables à valeurs dans $\mathbb{R}$.	Notations $\partial^2_{i,j} f$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$.
Fonction de classe $\mathscr{C}^2$.	
Théorème de Schwarz (cas de fonctions de classe $\mathscr{C}^2$).	Démonstration hors programme.
Exemples d'équations aux dérivées partielles du premier et du second ordre.	Les étudiants doivent être capables d'utiliser un changement de variables dans les deux cas suivants : transformation affine, passage en coordonnées polaires.
f) Extremums d'une fonction de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}$	
Extremum local, global.	
Si une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur un ouvert de $\mathbb{R}^p$ atteint un extremum local en un point, alors celui-ci est un point critique.	
Recherche d'extremums globaux sur une partie fermée bornée de $\mathbb{R}^p$.	
Pour une fonction numérique de classe $\mathscr{C}^2$ sur un ouvert de $\mathbb{R}^2$: formule de Taylor-Young ; étude de l'existence d'un extremum local en un point critique où $rt-s^2 \neq 0$.	